Anweisung zum Rechnen für Bürger- und Land-Schulen

König, Georg Ludwig

Oldenburg, 1800

VD18 13391704

Von den einfachen Rechnungsarten.

urn:nbn:de:gbv:45:1-7792

Von den einfachen Rechnungsarten.

Erstes Kapittel.
Vom Addiren oder Zuzählen.

§. 14.

Addiren oder Zuzählen oder Summiren heißt: **eine Zahl finden, welche mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist.** Die einzelnen Zahlen, welche addirt werden sollen, pflegt man wohl Pöste zu nennen; die gefundene Zahl heißt die Summe. Man kann auch sagen, addiren heiße: **die Summe gegebener Zahlen finden.**

Die Summe wird durch das Zuzählen gefunden. Wenn ich die Summe von 4 und 5 zu wissen verlange, so lege ich zu 4 eine Einheit hinzu, dann habe ich 5; noch eine Einheit, dann habe ich 6; noch eine Einheit, dann habe ich 7; noch eine Einheit, dann habe ich 8; und noch eine, dann habe ich 9. Weil nun nichts mehr hinzuzuzählen da ist, so sehe ich, daß 9 die Summe von 4 und 5 ist, oder daß $4 + 5 = 9$.

Durch

Durch Uebung erlangt man leicht die Fertigkeit, zwey gegebene Zahlen von der Ordnung Null addiren zu können, ohne daß man nöthig hat, die eine Zahl nach ihren Einheiten zu der andern zu zählen, folglich auch zwey Zahlen von jeder höhern Ordnung; denn 2 + 6 = 8, und 20 + 60 = 80, und 200 + 600 = 800 u. s. w.

Für die ersten Anfänger kann folgende Tabelle dienen, worin sich die Summen zweyer Zahlen von 1 bis 9 leicht finden lassen.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	6
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Man schreibe eine Reihe von Zahlen, die sich mit 0 anfängt, in ihrer natürlichen Folge unter einander; daneben eine andere Reihe von Zahlen in ihrer natürlichen Folge, die sich mit 1 anfängt; daneben eine, die sich mit 2 anfängt, dann eine, die sich mit 3 anfängt, und so fort bis auf die letzte, die sich mit 9 anfängt, wo in allen die Zahlen in ihrer natürlichen Folge fortgehen. Jede

Zahl in der ersten heruntergehenden Reihe linker Hand gehört zu einer Querreihe, und jede Zahl in der obersten Querreihe gehört zu einer heruntergehenden Reihe. Jede Zahl in der ersten heruntergehenden Reihe zeigt an, wie viel Einheiten zu irgend einer Zahl in der obersten Querreihe addirt sind, um ein Glied der Querreihe zu werden, wovon jene Zahl in der ersten heruntergehenden Reihe das erste Glied ist; z. B. 6 in der ersten heruntergehenden Reihe zeigt an, daß zu 8 in der obersten Querreihe 6 Einheiten addirt sind, damit aus 8 ein Glied der Querreihe werden konnte, wovon 6 das erste Glied ist, nämlich 14. Die Zahl also, wo sich eine Querreihe und eine heruntergehende Reihe schneiden, ist die Summe von den ersten Zahlen dieser Reihen, z. B. $5+6=11$; $4+3=7$.

§. 15.

Bey der Addition hat man folgende Regeln zu beobachten, die in der That nur Abkürzungen des oben gezeigten Verfahrens sind.

1) Die zu addirenden Zahlen (Pöste) werden so unter einander geschrieben, daß einerley Ordnungen untereinander zu stehen kommen, d. h. Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w.

2) Weil die Ordnungen der Ziefern von der Rechten gegen die Linke steigen: so fängt man der Bequemlichkeit wegen, die sich gleich entdecken wird, mit den Ziefern der niedrigsten Ordnung an.

3) Die Summe der Zahlen von der Ordnung Null, oder der Einer ist nun entweder

a)

a) 9 oder unter 9, dann wird sie in die Stelle der Einer unter den Strich geschrieben, welchen man vorher unter den zu addirenden Zahlen gezogen hat; oder

b) über 9, und enthält nebst den Einheiten von der Ordnung Null auch Einheiten von der ersten, manchmal auch von der zweiten Ordnung (Zehner, Hunderte), dann werden nur die Einer unter den Strich in die Stelle der Einer geschrieben, die Zehner und Hunderte gemerkt, um zu der Summe der Zehner und Hunderte demnächst zugezählt zu werden.

4) Darauf addirt man die Zehner, und zählt zur Summe derselben die etwa angemerkten Zehner hinzu. Das, was in (3) von den Zehnern und Hunderten gesagt ist, gilt hier von den Hunderten und Tausenden. So geht man allezeit zu höheren Ordnungen über, und beobachtet ebendasselbe.

Anmerkung zu 1. Da nur gleichartige Größen zusammengezählt werden können; so können auch nur Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern, Hunderte zu Hunderten gezählt werden.

$$\begin{array}{r} 8234 \\ 428 \\ \underline{34} \\ 8696 \end{array}$$

Hier ist erstlich $4 + 8 + 4 = 16 = 10 + 6$. Die 6 wird unter den Strich in die Stelle der Einer gesetzt, und die 10 angemerkt. Ferner $3 + 2 + 3 = 8$ und 1 dazu ist $= 9$, die Summe enthält also lauter Zehner, die 9 wird daher in die Stelle der Zehner unter den Strich gesetzt. Ferner $2 + 4 = 6$, und $8 = 8$, bei-

beides konnte nun gleich in die gehörige Stelle geschrieben werden, nämlich 6 in die Stelle der Hunderte, und 8 in die Stelle der Tausende.

Zweites Kapittel.
Vom Subtrahiren oder Abzählen.

§. 16.

Subtrahiren heißt: **eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen abzählen, oder finden, um wieviel die eine Zahl die andere übertrifft**, d. h. größer ist als die kleinere. Die Zahl, von welcher man abzählen soll, heißt der **Minuendus** (eine Zahl, die durch abzählen vermindert werden soll); die welche abgezählt werden soll, **Subtrahendus** (eine Zahl die abgezogen werden soll); das, was von der größern Zahl überbleibt, heißt der **Rest** oder die **Differenz** (Unterschied beider Zahlen).

Wenn von 8 sollte 3 abgezählt werden, so wird der, welcher es zum erstenmale versucht, erst eine Einheit von 8 nehmen, und dann bleibt noch 7; von dieser 7 wird er noch eine Einheit nehmen, und dann bleibt 6; von dieser 6 noch eine Einheit, dann wird noch 5 über seyn. Diese 5 ist, weil nur 3 abzuzählen war, der gesuchte Rest. Uebung giebt die Fertigkeit, sogleich den Rest bestimmen zu können, wenn Einer von Einern, Zehner von

Zehnern, Hunderte von Hunderten u. s. w. sollen abgezählt werden, ohne erst eine Einheit von der andern abzuzählen.

Anmerkung. Anfängern kann die Tabelle §. 14 dazu behülflich seyn. In dieser wird der Minuendus aufgesucht, welcher mit dem Subtrahendus in einer Querreihe stehen muß, und diesen sucht man in der ersten heruntergehenden Reihe linker Hand. Dann ist die oberste Zahl in der heruntergehenden Reihe, wozu der Minuendus gehört, der gesuchte Rest.

§. 17.

Bey der Subtraction hat man folgende Regeln zu beobachten, die auch nur Abkürzungen des Abzählens sind.

1) Der Subtrahendus wird so unter den Minuendus geschrieben, daß gleiche Ordnungen unter einander zu stehen kommen.

2) Die niedrigste Ziefer rechter Hand im Subtrahendus wird von der über ihr stehenden im Minuendus abgezogen, und hier tritt von den vier folgenden Fällen immer einer ein.

a) Entweder steht in der niedrigsten Stelle im Subtrahendus 0, dann wird natürlich nichts von der darüber stehenden Ziefer abgezogen, und diese (es kann auch 0 seyn) wird unverändert unter den Strich in die Stelle der Einer gesetzt.

b) Oder die Ziefer der niedrigsten Stelle im Subtrahendus ist kleiner, als die über ihr stehende Ziefer im Minuendus; dann wird jene von dieser abgezogen, und der Rest unter den Strich in die Stelle der Einer gesetzt.

c) Oder die Ziefer der niedrigsten Stelle ist gleich der über ihr stehenden Ziefer, dann ist der Rest 0, welche in die Stelle der Einer muß gesetzt werden.

d) Oder die Ziefer der niedrigsten Stelle im Subtrahendus ist größer als die über ihr stehende Ziefer, in diesem Falle ist das Abziehen so unmöglich. Man hilft sich nun auf die Weise, daß man eine nächsthöhere Einheit, welche zehn niedrigere Einheiten enthält, zu Hülfe nimmt, und zu der kleinern Ziefer des Minuendus addirt. Darauf zieht man wie gewöhnlich ab, und schreibt den Rest in die gehörige Stelle.

Bey der zu Hülfe genommenen Einheit kann man sich nun vorstellen

aa) entweder, daß sie von der Ziefer der nächsthöhern Stelle im Minuendus genommen (geborgt) sey, welche deswegen auch mit einem (.) bezeichnet wird, und so muß die Ziefer in dieser Stelle natürlich um eine Einheit geringer werden, weil eine Einheit davon genommen ist.

bb) oder daß, da durch einen Zusatz einer höhern Einheit der Minuendus um diese gewachsen ist, auch der Subtrahendus um diese Einheit wachsen muß, damit das Verhältniß beider dasselbe bleibe, und so muß dann die Ziefer der höhern Stelle im Subtrahendus um eine Einheit wachsen, und daß sie dieses soll, wird auch durch einen dabeygesetzten (.) angezeigt. Es ist nämlich $7 - 4 = 3$, eben so auch $(7 + 1) - (4 + 1) = 3$.

Jenes hat man mit Recht durch **oben borgen**, dieses ungereimt durch **unten borgen** ausgedrückt.

3) Diese Regeln gelten auch von Zehnern, Hunderten, Tausenden u. s. w. Der Rest von den Zehnern wird auch unter den Strich in die Stelle der Zehner, der Rest von Hunderten eben so in die Stelle der Hunderte geschrieben.

Anmerkung zu d. Wenn oben geborgt wird, und im Minuendus folgen gegen die linke Hand zu ein oder mehrere Nullen, so ist die erste Null rechter Hand 10, die darauf links folgenden jede 9. Bey der Ziefer nämlich, welche links vor den Nullen steht, kann nur geborgt werden, und dadurch wird die ihr rechts stehende Null 10; sie giebt aber ihrer Nachbarin zur rechten eine Einheit ab, bleibt also 9, und diese wird 10; folgt noch eine Null, so bekommt diese von jener auch eine Einheit, und wird 10, und jene 9 u. s. w. Ist bey der ersten Null rechter Hand auch schon geborgt, so wird sie gleichfalls 9.

Beyspiele für alle vier Fälle.

a) $\begin{array}{r} 346 \\ 20 \\ \hline 326 \end{array}$ Hier ist $6 - 0 = 6$; und $4 - 2 = 2$, und $3 - 0 = 3$.

b) $\begin{array}{r} 684 \\ 322 \\ \hline 362 \end{array}$ Hier ist $4 - 2 = 2$; und $8 - 2 = 6$; und $6 - 3 = 3$.

c)

c) 5777
   777
   ———
   5000

Hier ist 7 — 7 = 0; 7 — 7 = 0; 7 — 7 = 0; und 5 — 0 = 5.

d) 2128
   269
   ———

Hier kann 9 von 8 nicht abgezogen werden, man muß also eine nächsthöhere Einheit zu Hülfe nehmen, und ihre 10 niedrigere Einheiten zu 8 addiren, also 18 — 9 = 9. Nun wird entweder nach aa die 2 im Minuendus 1, oder nach bb die 6 im Subtrahendus 7 werden. In beiden Fällen muß man wieder eine nächsthöhere Einheit zu Hülfe nehmen, und so ist entweder nach aa, 11 — 6 = 5, oder nach bb, 12 — 7 = 5, beides ist gleich. Bey den Hunderten u. s. w. verfährt man eben so.

Anmerkung. Ob richtig addirt sey, sieht man, wenn das addirte wieder von der Summe abgezogen wird, und ob richtig subtrahirt sey, wenn der Rest zum Subtrahendus wieder addirt wird; im ersten Fall muß die eine von den zu addirenden Zahlen, im zweiten aber der Minuendus herauskommen. Jenes heißt die **Probe der Addition**, dieses die **Probe der Subtraction.**

Drittes Kapittel.

Vom Multipliciren.

§. 18.

Multipliciren heißt: eine Zahl so vielmal zu o addiren, als die andere Zahl anzeigt; z. B.

wenn 4 mit 2 soll multiplicirt werden, so muß man entweder 4 zu 0 2 mal oder 2 zu 0 4 mal addiren, also entweder 0 + 4 + 4 = 8, oder 0 + 2 + 2 + 2 + 2 = 8, beides läuft auf eins hinaus. Sonst sagt man auch, multipliciren heiße: **eine Zahl so vielmal nehmen, als die andere Zahl anzeigt.** Die beiden gegebenen Zahlen heißen **Factoren**; der eine Factor, welcher so vielmal, als der andere Einheiten enthält, zu 0 soll addirt werden, heißt der **Multiplicandus**; der andere, welcher bestimmt, wievielmal der erste zu 0 soll addirt werden, der **Multiplicator**; das, was herauskommt, oder die gesuchte Zahl, heißt das **Product** oder das **Factum**.

§. 19.

Wenn 4 mit 7 zu multipliciren wäre, so würde der, welcher dieses zu erst versuchte, sich die Zahl 7 denken, zu dieser 7 noch 7 nach ihren Einheiten zuzählen, dann würde er 14 haben. Zu dieser 14 würde er noch 7 eben so zuzählen, dann hätte er 21. Zu dieser 21 noch 7, dann würde die gesuchte Zahl oder das Product 28 seyn. Diese Weitläufigkeit ersparen sich Anfänger durch eine Producten-Tafel (Einmaleins), deren Einrichtung und Gebrauch leicht verständlich gemacht werden kann, und die selbst endlich nach einiger Uebung entbehrlich wird.

Es werden nämlich die Zahlen in ihrer natürlichen Folge von 1 bis 9 hingeschrieben; unter jeder Zahl aber eine solche Reihe nach unten hin, welche entsteht, wenn die erste Zahl zu sich selbst addirt wird, zu der Summe wieder die erste Zahl, zu dieser

dieser Summe wieder die erste Zahl, und so weiter; so bekommt man das zweite, dritte, vierte, fünfte — neunte Glied von jeder heruntergehenden Reihe.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Man sieht leicht, daß in dieser Tafel so viele heruntergehende Reihen als Querreihen seyn müssen, und daß jede Zahl in irgend einem Fache sowohl zu einer Querreihe, als zu einer heruntergehenden Reihe gehört. Ferner aus der Entstehung der heruntergehenden Reihen ist klar, daß jede Zahl in irgend einem Fache ein Product ist aus der ersten Zahl ihrer Querreihe in die erste Zahl ihrer heruntergehenden Reihe. Man kann also mit Hülfe dieser Tafel jedes Product, dessen Factoren Zahlen von 1 bis 9 sind, finden. Die gegebenen Factoren werden in der obersten Querreihe und in der ersten heruntergehenden Reihe linker Hand aufgesucht, wobey es gleichviel ist, welchen Factor man in dieser oder jener Reihe aufsucht, und da, wo sich die heruntergehende Reihe des einen Factors und die Querreihe des andern schneiden, ist das verlangte Product, z. B. 5 × 7 = 35.

§. 20.

Um die Regeln der Multiplication desto kürzer fassen und verständlicher vortragen zu können, wollen wir drey Fälle betrachten; 1) wenn der Multiplicator eine Ziefer von der Ordnung Null ist, 2) wenn er eine Ziefer von einer höhern Ordnung ist, und 3) wenn er Ziefern von mehrern Ordnungen enthält.

1) **Der erste Fall.** Aus der Einleitung erhellet, daß eine Zahl von mehrern Stellen, z. B. 35234 auch so könne geschrieben werden: 30000 + 5000 + 200 + 30 + 4. Soll nun die gegebene Zahl durch 6 multiplicirt werden: so muß jedes Glied in dem zweiten Ausdrucke der gegebenen Zahl 6 mal zu 0 addirt werden, und dies läßt sich, da die geltende Ziefer in jedem Gliede nicht größer als 9 seyn kann, leicht nach der Tabelle bewerkstelligen. Das Product wäre nun 180000 + 30000 + 1200 + 180 + 24. Diese Glieder so unter einander gesetzt, daß gleiche Ordnungen unter einander stehen, und dann addirt, geben das verlangte Product.

$$\left.\begin{array}{r} 180000 \\ 30000 \\ 1200 \\ 180 \\ 24 \end{array}\right\} \text{einfache Producte.}$$

$$\overline{211404} = \text{der Summe dieser einfachen Producte oder dem Producte.}$$

Eben

Eben so verfährt man beym ersten und gewöhnlichen Ausdruck der gegebenen Zahl, man mag nun mit der höchsten oder niedrigsten Ordnung anfangen, und so zu den folgenden übergehn.

1) mit der höchsten 35234

	6
	180000
	30000
	1200
	180
	24
	211404

2) mit der niedrigsten 35234

	6
	24
	180
	1200
	30000
	180000
	211404

Um das nachherige addiren zu ersparen, setzt man, wenn ein einfaches Product aus mehrern Ziefern besteht, jedesmal die Ziefer von der niedrigern Ordnung in ihre gehörige Stelle, die Einheiten der höhern Ordnung addirt man zum folgenden einfachen Producte, z. B.

$$\begin{array}{r} 35234 \\ 6 \\ \hline 211404 \end{array}$$

Nämlich $4 \times 6 = 24$, es wird also 4 unter den Strich in die Stelle der Einer gesetzt, und 2 angemerkt (im Sinne behalten). Ferner $3 \times 6 = 18$, und $18 + 2 = 20$, nun wird 0 in die Stelle der Zehner gesetzt, und 2 angemerkt. Ferner $2 \times 6 = 12$, und $12 + 2 = 14$, nun wird 4 in die Stelle der Hunderte gesetzt, und 1 angemerkt. Ferner $5 \times 6 = 30$, und $30 + 1 = 31$, nun wird 1 in die Stelle der Tausende gesetzt, und 3 angemerkt. Endlich $3 \times 6 = 18$ und $18 + 3 = 21$, weil kein einfaches Product mehr folgt, so wird 1 in die Stelle der Zehntausende, 2 in die Stelle der Hunderttausende gesetzt.

2) **Der zweite Fall.** Hier ist ganz dasselbe zu beobachten, nur wird jedes einfache Product um so viel Stellen, als die Zahl der höchsten Ordnung im Multiplicator anzeigt, erhöht, oder, was eben dasselbe ist, es werden so viele Nullen dem einfachen Producte angehängt, z. B. 2452 mit 6 Einheiten von der zweiten Ordnung (mit 600) multiplicirt.

$$\begin{array}{r} 2452 \\ 600 \\ \hline 1200 \\ 30000 \\ 240000 \\ 1200000 \\ \hline 1471200 \end{array} \qquad \text{oder kürzer} \qquad \begin{array}{r} 2452 \\ 600 \\ \hline 1471200 \end{array}$$

3) **Der dritte Fall.** Wenn 23622 mit 2322 multiplicirt werden sollen, so ist dies eben so viel, als wenn 23622 mit 2000 + 300 +

20 + 2 soll multiplicirt werden; und nun sieht man leicht, daß die beiden obigen Fälle wieder eintreten.

$$
\begin{array}{rl}
23622 & \text{Multiplicandus} \\
2322 & \text{Multiplicator} \\
\hline
\left.\begin{array}{r}
47244 = 23622 \times 2 \\
472440 = 23622 \times 20 \\
7086600 = 23622 \times 300 \\
47244000 = 23622 \times 2000
\end{array}\right\} & \text{Theilproducte} \\
\hline
54850284 = & \text{dem Producte oder der Summe der Theilproducte.}
\end{array}
$$

Bey 23622 × 2 verfährt man ganz nach 1, bey 23622 × 20 auch nach 1, nur wird nach 2, jede Stelle um eine Ordnung höher, deswegen rückt man auch gleich mit der niedrigsten Ziefer des ersten einfachen Products um eine Stelle weiter gegen die linke Hand zu ein. Bey 23622 × 300 rückt man mit der niedrigsten Ziefer des ersten einfachen Products um zwey Stellen gegen die linke Hand zu ein u. s. w.

§. 21.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen werden sich die Regeln der Multiplication kurz so ausdrücken lassen.

1) Beide Factoren werden so unter einander geschrieben, daß die Ziefern von gleichen Ordnungen unter einander zu stehen kommen. Bequemer ist es, den Factor, welcher die meisten Ziefern hat, oben zu schreiben.

2) Mit der niedrigsten Stelle des Multiplicators multiplicirt man nun den ganzen Multiplican-

plicandus, so daß man die Ziefer der niedrigsten Ordnung in jedem einzelnen Producte an ihren gehörigen Ort setzt, die höhere aber anmerkt, und sie zum folgenden einzelnen Producte addirt.

3) Dann multiplicirt man mit der Ziefer der folgenden Ordnung im Multiplicator den ganzen Multiplicandus, und rückt gleich mit der Ziefer der niedrigsten Stelle im ersten einzelnen Product um eine Stelle weiter gegen die linke Hand ein; übrigens verfährt man, wie in 2.

4) Endlich werden die Theilproducte zusammenaddirt, und ihre Summe ist das verlangte Product.

Anmerkung 1. Hat ein Factor, oder haben beide Factoren, rechter Hand eine oder mehrere Nullen, so schreibt man beide Factoren so unter einander, als wenn rechter Hand gar keine Nullen wären, hängt aber hernach dem Producte rechter Hand so viele Nullen an, als in beiden Factoren rechter Hand zusammengenommen waren, z. B.

1)	2)	3)
32000	3452	220000
4	2000	400
128000	6904000	88000000

Anmerkung 2. Befinden sich in der Mitte des Multiplicators ein oder mehrere Nullen, so übergeht man sie, rückt aber mit dem folgenden Theilproducte gehörig ein; denn jede Zahl mit 0 multiplicirt giebt 0 zum Product, also sind so viele Theilproducte = 0, als Nullen im Multiplicator sind, z. B.

$$\begin{array}{r} 56232 \\ 2003 \\ \hline 168696 \\ 112464 \\ \hline 112632696 \end{array}$$

Anmerkung 3. Weil $3620 \times 36 = 3620 \times 6 \times 6$ ist, so kann man auch den Multiplicator in Factoren zerfällen, mit dem einen Factor den Multiplicandus multipliciren, und dieses Product wieder mit dem andern Factor. Wären drey Factoren da, so müßte das letzte Product noch mit dem dritten multiplicirt werden, z. B.

$$
\begin{array}{rl}
3620 & \times\ \underline{36} \\
\underline{6} & \ 6 \\
21720 & \ 6 \\
\underline{6} & \\
130320 &
\end{array}
$$

Man erspart sich dadurch das addiren der Theilproducte Ferner, da $2523 \times 57 = 2523 \times (7 \times 8 + 1) = 2523 \times 7 \times 8 + 2523$, so kann man dies Verfahren auch anbringen, wenn der Multiplicator sich nicht in Factoren zerfällen läßt. Man sucht eine Zahl, die sich in Factoren zerfällen läßt, und von dem Multiplicator nur um eine oder wenige Einheiten unterschieden ist; multiplicirt mit den Factoren der gesuchten Zahl wie oben geschehen ist, und addirt zum Producte den Multiplicandus so vielmal genommen, als der Unterschied der gesuchten Zahl vom Multiplicator anzeigt, z. B.

$$
\begin{array}{rl}
2523 & \times\ \underline{57} \\
\underline{7} & \ 7 \\
17661 & \ 8+1 \\
\underline{8} & \\
141288 & \\
\underline{+\ 2523} & \\
143811 &
\end{array}
$$

Ist

Ist die gesuchte Zahl größer als der Multiplicator, so bleibt alles wie vorher, nur subtrahirt man den Multiplicandus so vielmal genommen, als der Unterschied der gesuchten Zahl vom Multiplicator anzeigt, vom Product. Denn es ist $822 \times 33 = 822 \times (7 \times 5 - 2) = 822 \times 7 \times 5 - 822 \times 2$, also

$$\begin{array}{rl} 822 \times & 33 \\ 7 & 7 \\ \hline 5754 & 5 - 2 \\ 5 & \\ \hline 28770 & \\ - 822 \times 2 = 1644 & \\ \hline 27126 & \end{array}$$

Ich habe dieses Verfahren nur anzeigen wollen, ob ich gleich nicht einsehen kann, daß durch die beiden letzten Arten viel erspart wird.

Viertes Kapittel.

Vom Dividiren.

§. 22.

Dividiren heißt: eine kleinere Zahl von einer größern so vielmal abziehen, bis entweder nichts oder etwas überbleibt, was kleiner ist, als die abzuziehende Zahl. Man erfährt durch die Division, wie vielmal eine Zahl in der an-

andern enthalten ist. Die Zahl, in welcher eine andere ein oder mehreremale enthalten ist, heißt der **Dividendus** (eine Zahl, welche zu theilen ist); die, welche ein oder mehrere male im Dividendus enthalten ist, heißt der **Divisor** (Theiler); und die Zahl, welche anzeigt, wievielmal dieser in jenem enthalten ist, heißt der **Quotient**; bleibt etwas über, was kleiner ist als der Divisor, so nennt man dieses den **Rest**.

§. 23.

Wenn 45 mit 9 zu dividiren wären, so würde einer, der dies zuerst versuchte, so vielmal 9 nach ihren Einheiten abzählen, als dieses anginge, und sich dabey anmerken, wie oft dieses geschehen sey. Er würde finden, daß sich 9 von 45 nur 5 mal abzählen ließe, oder, welches dasselbe ist, daß 9 in 45 nur 5 mal enthalten sey, und daraus den Schluß machen, daß, wenn man 9 zu 0 fünfmal addirte, oder 9 mit 5 multiplicirte, das Product 45 seyn würde.

Da man nun den Dividendus als ein Product betrachten kann, von dem ein Factor, nämlich der Divisor, gegeben ist, und dessen zweiter Factor, der Quotient, gesucht wird; so wird sich der Quotient einer jeden Zahl, welche ein Product aus zwey einfachen Zahlen von 1 bis 9 ist, weit bequemer mit Hülfe der Multiplicationstafel oder des Einmaleins §. 19 finden lassen. Denn da in dieser Tafel jede Zahl in irgend einem Fache die oberste von den über ihr stehenden Zahlen und die erste Zahl linker Hand in ihrer Querreihe zu Factoren hat: so ergiebt sich sogleich der andere Factor, wenn das Product und der eine Factor, welche zusammen in einer Querreihe liegen müssen, gegeben sind.

§. 24.

Folgende Betrachtungen werden das Verständniß der Divisionsregeln erleichtern. Wir wollen zwey Fälle setzen, 1) wenn der Divisor aus einer, 2) wenn der Divisor aus mehreren Ziefern besteht.

1) **Der erste Fall.** Gesetzt, 82345 solle durch 2 dividirt werden, so denke man nur daran, daß man den Dividendus auch so ausdrücken könne 80000 + 2000 + 300 + 40 + 5. Nun ist natürlich die Frage: wieviel zehntausendmal, und wieviel tausendmal, und wieviel hundertmal, und wieviel zehnmal, und wieviel einfache mal 2 im Dividendus enthalten sey? Es steckt aber 2 in 80000 genau 40000 mal; in 2000 genau 1000 mal, in 300 aber 100 mal, und hier bleibt etwas über, welches man auf folgende Weise findet. Ist der Divisor im Dividendus genau so vielmal enthalten, als der Quotient Einheiten enthält: so muß das Product aus dem Divisor in den Quotienten dem Dividendus gleich seyn; wo nicht, so muß das Product vom Dividendus abgezogen das geben, was überbleibt. Also 100 × 2 = 200 und 300 − 200 = 100. In diesem Reste ist 2 gewiß einige zehnmal enthalten, er kann also gleich zu dem folgenden Gliede addirt werden, und es ist nun die Frage, wieviel zehnmal ist 2 in 100 + 40 oder 140 enthalten? Da man nun aus der Multiplicationstafel weiß, daß 2 × 7 = 14 ist, so ist

der

der Schluß leicht, daß 2 in 140 genau siebenzehnmal oder 70 mal stecke. Endlich läßt sich 2 von 5 nur 2mal abzählen, oder 2 ist in 5 nur 2mal enthalten; aber $2 \times 2 = 4$ und $5 - 4 = 1$. Der ganze Quotient ist nun $40000 + 1000 + 100 + 70 + 2 = 41172$. Wenn man also den Rest $= 1$ vom Dividendus 82345 abzieht, so ist 2 in $82345 - 1$ genau 41172 mal enthalten. In diesem Verfahren liegt der Grund, warum man beym Dividiren mit der höchsten Stelle des Dividendus anfängt, und die Ziefer der höchsten Ordnung im Quotienten zuerst erhält.

Anmerkung. Wenn die Ziefer der höchsten Ordnung im Dividendus kleiner als der Divisor ist, so kann dieser in jenem nicht so vielmal enthalten seyn, als die höchste Ordnung ist, aber gewiß mehrere male so vielmal, als die nächstniedrige Ordnung anzeigt, z. B. 4 ist in 118 oder in $100 + 20 + 8$ gewiß nicht hundertmal, aber gewiß mehrere zehnmal enthalten. Daher frägt man auch gleich, wieviel zehnmal 4 in $100 + 20$ oder in 120 stecke.

2) **Der zweite Fall.** Gesetzt 482936 oder $400000 + 80000 + 2000 + 900 + 30 + 6$ soll durch 823 dividirt werden. Man übersieht leicht, daß der Divisor im Dividendus gewiß keinmal hunderttausendmal, keinmal zehntausendmal, keinmal tausendmal enthalten sey; man frägt also nur, wievielmal er in $400000 + 80000 + 2000 + 900$, oder in 482900 stecke. Man schreibe den Divisor so unter den Dividendus, daß die erste Ziefer linker Hand im Divisor unter die erste linker Hand im Dividendus zu stehen kommt, wenn jene gleich oder kleiner als diese, und zugleich der ganze Divisor gleich oder kleiner als der über ihm stehende

Theil

Theil des Dividendus ist; wo nicht, so rückt man den Divisor um eine Stelle weiter gegen die rechte Hand zu, also nicht $\frac{482900}{823}$, sondern $\frac{482900}{823}$, weil $4 < 8$

nicht $\frac{346700}{389}$, sondern $\frac{346700}{389}$, weil $346 < 389$.

Man darf jetzt nur suchen, wievielmal die erste Ziefer linker Hand im Divisor in der einen oder den zwey über ihr stehenden Ziefern des Dividendus enthalten sey, und dann schließen: wenn der ganze Divisor in dem über ihm stehenden Theile des Dividendus so vielmal enthalten ist, als die erwähnte erste Ziefer im Divisor in der Zahl, welche die eine oder die zwey über ihr im Dividendus stehenden Ziefern ausdrücken: so muß auch der ganze Divisor mit diesem Quotienten multiplicirt entweder eben so groß seyn, als der über ihm stehende Theil des Dividendus, oder dieser muß das Product um etwas geringeres übertreffen, als der ganze Divisor ist. Ist aber das Product größer, als der über dem ganzen Divisor stehende Theil des Dividendus: so ist der Quotient zu groß angenommen; übertrifft der über dem Divisor stehende Theil des Dividendus das Product um etwas größeres, als der Divisor ist: so ist der Quotient zu klein angenommen. Im ersten Beyspiel steckt 8 in 48 genau 6 mal; nähme man nun an, daß der Divisor in dem über ihm stehenden Theil des Dividendus 6 mal enthalten seyn sollte: so muß $823 \times 6 = 4938$ gleich dem über dem Divisor stehenden Theile des Dividendus, also gleich 4829 seyn. Weil nun aber $4938 > 4829$ ist, so ist 6 zu groß angenommen. Nähme man 4 mal, so ist $823 \times 4 = 3292$;

aber

aber 4829 — 3292 = 1537, und 1537 > 823, also ist 4 zu klein. Nähme man 5 mal; so ist 823 × 5 = 4115, und 4829 — 4115 = 714; aber 714 < 823, also ist 5 richtig angenommen.

Im Beyspiel ist also der erste Theil des Quotienten 500. Es bleiben über 71400. Nun ist die Frage: wievielmal 10 mal steckt 823 in 71400 + 30 oder in 17430. Man schreibt also wieder

nicht 71430 sondern 71430
823 823.

Nun steckt 8 in 71 gewiß 8 mal, denn 8 × 8 = 64, und 71 — 64 = 7, also 823 × 8 = 6584, und 7143 — 6584 = 559, und 559 < 823, daher ist der zweite Theil des Quotienten 80. Nun bleibt noch über zu suchen, wieviel einfachemal der Divisor in 5590 + 6 oder in 5596 stecke. Man schreibt wieder

nicht 5596 sondern 5596
823 823

Aber 8 ist in 55 nur 6 mal ganz enthalten, und 823 × 6 = 4938, und 5596 — 4938 = 658, und 648 < 823, also ist der dritte und letzte Theil des Quotienten 6, und der ganze Quotient 500 + 80 + 6 = 586. Der Rest ist 658.

§. 25.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen lassen sich die Regeln der Division kurz so ausdrücken.

1) Der Divisor wird so unter den Dividendus gesetzt, daß die erste Ziefer linker Hand im Divisor unter die erste Ziefer linker Hand im Dividendus zu stehen kommt, wenn diese größer als jene oder ihr gleich, und der Divisor kleiner als der

C über

über ihm stehende Theil des Dividendus oder ihm gleich ist; wo nicht, so rückt man den Divisor um eine Stelle weiter gegen die rechte Hand, z. B.

1) 38623 (621) 2) 162402 (22).

2) Man sucht, wievielmal die erste Ziefer linker Hand im Divisor in der über ihr stehenden einen Ziefer, oder, wenn der Divisor um eine Stelle weiter gegen die rechte Hand gerückt ist, in den zwey Ziefern des Dividendus, als Zahl betrachtet, enthalten sey; multiplicirt nun mit diesem Quotienten den ganzen Divisor, und wenn das Product von dem über dem Divisor stehenden Theil des Dividendus abgezogen einen kleinern Rest giebt, als der Divisor ist, oder nichts überbleibt: so ist jene Zahl, womit der Divisor multiplicirt wurde, die höchste Ziefer im Quotienten; ist aber das Product größer als der über dem Divisor stehende Theil des Dividendus: so nimmt man eine kleinere Zahl; ist dieses Product kleiner als der über dem Divisor stehende Theil des Dividendus, aber der Rest größer als der Divisor: so nimmt man eine größere Zahl, und verfährt damit wie oben gezeigt worden.

1)	38623 (1	2)	162402 (2
	(22)		(621)
	22		1242
	16		382

3) Zu dem Rest wird die folgende Ziefer im Dividendus heruntergesetzt, und der Divisor so unter den Dividendus gesetzt, daß seine letzte Ziefer rech-

rechter Hand unter der heruntergesetzten Ziefer des Dividendus steht.

1) 38623 (1
(22)
22

166
(22)

2) 162402 (2
(621)
1242

3820
(621)

4) Nun wird die zweite Regel wieder angewandt, um die zweite Stelle des Quotienten zu finden, und darauf die dritte Regel, um den Divisor wieder richtig unterzusetzen. Man merke nun noch, daß man, wenn ein Rest nebst der zu ihm aus dem Dividendus heruntergerückten Ziefer kleiner seyn sollte als der Divisor, im Quotienten 0 setzt, noch eine Ziefer aus dem Dividendus herunterrückt, und den Divisor wieder wie in 3, setzt.

1) 38623 (1755
(22)
22

166
(22)
154

122
(22)
110

123
(22)
110
---
13 Rest.

2) 162402 (261
(621)
1242

3820
(621)
3726

942
(621)
621
---
321 Rest.

Anmerkung 1. Man pflegt auch wohl den Divisor nicht unter den Dividendus zu schreiben, sondern ihn links zur Seite hinzusetzen. Man erspart sich freylich hiedurch das öftere Hinschreiben des Dividendus, aber ein Anfänger erspart nichts dadurch, weil es ihm zu häufigen Irrungen Anlaß giebt.

Anmerkung 2. Befinden sich im Divisor und Dividendus rechter Hand Nullen, so kann man, ohne daß der Quotient dadurch geändert wird, in beiden gleich viel Nullen wegstreichen. Der Grund wird erst aus dem folgenden deutlich werden. §. 27. 3.

Anmerkung 3. Ist eine Zahl mit einer Einheit von einer höhern Ordnung zu dividiren, so darf man nur so viel Stellen vom Dividendus rechter Hand abstreichen, als Nullen im Divisor sind, dann ist der Quotient der übrige Theil des Dividendus und ein Bruch, der die abgestriechenen Ziefern zum Zähler und den Divisor zum Nenner hat, z. B.

1) $3456789128 : 1000 = 3456789\frac{128}{1000}$.
2) $5623457 : 100000 = 56\frac{23457}{100000}$.

Eben dieses beobachtet man, wenn der Divisor eine Mehrheit von einer höhern Ordnung ist, nur muß man den übrigen Theil des Dividendus noch mit der geltenden Ziefer des Divisors dividiren, und bleibt ein Rest diesen links vor den abgestrichenen Ziefern setzen.

1) $482345 : 2000 = \frac{482}{2} + \frac{345}{2000} = 241\frac{345}{2000}$
2) $166892132 : 400000 = \frac{1668}{4} + \frac{92132}{400000} = 417\frac{92132}{400000}$.

Anmerkung 4. Weil man bequemer mit einem Divisor multiplicirt, der aus einer Ziefer, als der aus mehrern besteht; so zerfalle man, wenn es angeht, den gegebenen Divisor in Factoren; dividire mit dem einen Factor, darauf diesen Quotienten mit dem andern, so ist der letzte Quotient der gesuchte, z. B.

3) 6831 : 21
7) 2277 3
$325\frac{2}{7}$. 2.

Man

Man muß mit dem Factor anfangen, der im Divisor aufgeht. Doch diese und die vorhergehende Anmerkung werden erst aus dem folgenden Kapittel deutlich werden.

Anmerkung 5. Ob richtig multiplicirt sey, erfährt man, wenn das Product durch einen Factor dividirt wird; der Quotient muß dann der andere Factor seyn. Dies nennt man die **Probe der Multiplication.**

Anmerkung 6. Ob richtig dividirt sey, erfährt man, wenn der Quotient mit dem Divisor multiplicirt und zu dem Reste addirt den Dividendus wiedergiebt. Dies nennt man die **Probe der Division.**

Fünftes Kapittel.

Von den Brüchen.

§. 26.

Einen oder mehrere Theile eines in bestimmte gleiche Theile getheilten Ganzen nennt man, in Vergleichung mit dem Ganzen, einen **Bruch**. In dem Ausdrucke eines Bruchs heißt die Zahl, welche anzeigt, in wieviele Theile das Ganze getheilt ist, der **Nenner**; die, welche anzeigt, wieviel Theile genommen sind, der **Zähler** des Bruchs; dieser steht oben, jener unten.

$\frac{3}{17}$ Zähler. Nenner.

Das Ganze ist in siebenzehn Theile getheilt, und von solchen Theilen sind drey genommen. Man sollte diesen Bruch nun aussprechen drey Siebenzehntheile; man sagt aber kurz drey Siebenzehntel. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so ist der Bruch ein **eigentlicher** oder **ächter Bruch**, ist der Zähler größer als der Nenner, so ist der Bruch ein **uneigentlicher** oder **unächter Bruch**, in welchem das Ganze ein oder einigemale steckt, so vielmal nämlich der Nenner in dem Zähler enthalten ist, z. B. $\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$ oder $2\frac{2}{5}$.

§. 27.

Die Behandlung der Brüche beruhet auf folgenden Grundsätzen.

1) **Wird bey ungeändertem Nenner der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt:** so wird der Bruch um so vielmal größer, als die ganze Zahl Einheiten hat, z. B. $\frac{2}{7} \times 4 = \frac{8}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{7}$ oder $1\frac{1}{7}$.

2) **Wird bey ungeändertem Zähler der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der Bruch um so vielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten hat,** z. B. $\frac{2}{7} \times \; = \frac{2}{28}$; denn wenn ein Ganzes in sieben Theile getheilt ist, und jeder Theil wieder in vier Theile getheilt wird, so ist das Ganze in 28 Theile getheilt; $\frac{1}{28}$ ist der vierte Theil von $\frac{1}{7}$, also auch $\frac{2}{28}$ der vierte Theil von $\frac{2}{7}$.

3) **Aus beiden Sätzen folgt, daß ein Bruch, dessen Zähler und Nenner mit ebenderselben ganzen Zahl multiplicirt werden, nur in Rücksicht seines Ausdrucks, nicht aber seines Werths, verändert wird,** z. B. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$ und $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

4) Wird bey ungeändertem Nenner der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt: so wird der Bruch um sovielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten hat, z. B. $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$ und $\frac{2}{7}$ ist der dritte Theil von $\frac{6}{7}$.

5) Wird bey ungeändertem Zähler der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt, so wird der Bruch um so vielmal größer, als die ganze Zahl Einheiten hat, z. B. $\frac{3}{6 : 3} = \frac{3}{2}$; denn $\frac{1}{2}$ ist dreymal so groß als $\frac{1}{6}$, weil $\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$; also $\frac{3}{2}$ auch dreymal so groß als $\frac{3}{6}$.

6) Aus beiden Sätzen folgt, daß ein Bruch, dessen Zähler und Nenner mit eben derselben ganzen Zahl dividirt worden, nur in Rücksicht seines Ausdrucks, nicht aber seines Werths, verändert wird, z. E. $\frac{2}{12} : \frac{2}{2} = \frac{1}{6}$, und $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Aus 3 und 6 folgt:

a) Jeder Bruch kann, ohne daß sein Werth sich ändert, auf unzählige Arten ausgedrückt werden, z. B. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \frac{16}{48}$ u. s. w.

b) Jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor haben, läßt sich, ohne daß sein Werth sich ändert, auf einen einfacheren Ausdruck bringen, z. B. $\frac{16 : 16}{48 : 16} = \frac{1}{3}$.

c) Zwey oder mehrere gegebene Brüche mit ungleichen Nennern lassen sich in Brüche verwandeln, die gleiche Nenner haben, ohne daß ihre Werthe sich ändern, oder, sie lassen sich gleichnamig machen. Wie dieses geschehen kann, wird folgender Paragraph lehren.

§. 28.

Wenn zwey Brüche gegeben sind, so multiplicirt man jedes Bruchs Zähler und Nenner durch des andern Bruches Nenner, z. B. $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; hier ist $\frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}$, und $\frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{15}$, und $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, und $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, auch haben nun beide Brüche einerley Nenner.

Sind mehrere Brüche gegeben, und man multiplicirt eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Producte aus allen Nennern, so bleibt nach §. 27, 3 der Werth eines jeden Bruches ungeändert. Die gegebenen Brüche mögen nun seyn $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{7}$; so ist das Product aus allen Nennern $2 \times 5 \times 3 \times 7 = 210$. Man kann nun die Brüche auch so ausdrücken:

$$\frac{1}{2} \times \frac{210}{210};\ \frac{3}{5} \times \frac{210}{210};\ \frac{2}{3} \times \frac{210}{210};\ \frac{3}{7} \times \frac{210}{210}.$$

Multiplicirte man nun wirklich, so würden die Nenner ungleich werden, da 210 mit verschiedenen Zahlen multiplicirt wird. Aber alle diese Zahlen, nämlich 2, 5, 3, 7 gehen in 210 auf, weil 210 ein Product aus diesen Zahlen ist. Folglich kann man mit diesen Zahlen in 210, den Factor des Zählers, dividiren, und die Quotienten als Factoren in den Zählern setzen. Nun ist $210 : 2 = 105$; $210 : 5 = 42$; $210 : 3 = 70$; $210 : 7 = 30$; also

$$\frac{1 \times 105}{210};\ \frac{3 \times 42}{210};\ \frac{2 \times 70}{210};\ \frac{3 \times 30}{210}; \text{ oder } \frac{105}{210}; \frac{126}{210}; \frac{140}{210}; \frac{90}{210};$$

und nun sind alle Brüche gleichnamig.

Wenn die Nenner der gegebenen Brüche 2; 4; 6; 8; 5, 10 wären; so ist 2 als Factor in 4; 4 als Factor in 8; 5 als Factor in 10 enthalten,

folg-

folglich wird in dem Product $6 \times 8 \times 10 = 480$ jeder Nenner als Factor enthalten seyn. Man kann also auch jeden Nenner weglassen, der als Factor in einem andern enthalten ist, weil in dem Producte der übrigen Nenner auch jeder von den weggelassenen aufgehen muß. Da es also nur darauf ankommt, Zähler und Nenner der gegebenen Brüche mit einer Zahl zu multipliciren, in welcher alle Nenner der gegebenen Brüche aufgehn: so kann man auch dazu eine Zahl wählen, in welcher jeder Nenner, der als Factor in keinem von den übrigen enthalten ist, aufgeht, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$; statt $6 \times 8 = 48$ kann man 24 wählen.

Hieraus fließen folgende Regeln alle gegebene Brüche gleichnamig zu machen.

1) Die gegebenen Brüche werden unter einander geschrieben, und zur Seite zieht man einen Strich.

2) Jeder Nenner, der schon in einem andern aufgeht, wird weggelassen, und nun entweder aus den übrigen Nennern ein Product gemacht, welches als der gemeinschaftliche Nenner oben rechter Hand des Strichs hingeschrieben wird; oder, wenn es eine Zahl giebt, worin jeder von den noch übrigen Nennern aufgeht, so nimmt man diese zum gemeinschaftlichen Nenner.

3) Mit diesem gemeinschaftlichen Nenner wird der Zähler jedes Bruches multiplicirt, und das Product durch den Nenner dividirt; der Quotient ist der neue Zähler jedes Bruches, den man ihm zur Seite rechter Hand des Strichs hinschreibt, z. B.

	24
$\frac{1}{2}$	12
$\frac{2}{3}$	16
$\frac{3}{4}$	18
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{5}{6}$	20

Denn 2, 3, 4 gehen in 8 und 6 auf; das Product der übrigen wäre $8 \times 6 = 48$. Aber 8 und 6 gehen in 24 auf, daher ward 24 der allgemeine Nenner. Die Brüche sind nun $\frac{12}{24}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{3}{24}$; $\frac{20}{24}$.

Anmerkung 1. Einen Bruch reduciren heißt, ihn auf einen einfachen Ausdruck bringen. Man muß untersuchen, ob Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor haben, und wenn man diesen gefunden hat, verfährt man nach §. 27. 6. Diesen findet man aber allgemein auf folgende Weise. Der Nenner wird durch den Zähler dividirt; bleibt ein Rest, so wird durch diesen wieder der vorige Divisor dividirt; und dieser Rest wieder durch den vorigen Divisor, und so fährt man fort, bis in der Division alles aufgeht, d. h. kein Rest bleibt. Dann ist der Rest, welcher in dem vorigen Divisor aufging, die größte Zahl, worin Zähler und Nenner des gegebenen Bruches aufgehn. Bleibt 1 zum Rest, so ist dies ein Zeichen, daß Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, und der Bruch also nicht reducirt werden kann; z. B. der gegebene Bruch sey $\frac{8208}{29616}$; so ist

8208) 29616 (3
24624
4992) 8208 (1
4992
3216) 4992 (1
3216
1776) 3216 (1
1776
1440) 1776 (1
1440
336) 1440 (4
1344
96) 336 (3
288
48) 96 (2
96
0

also

also ist 48 der größte gemeinschaftliche Divisor, und $\frac{8208 : 48}{29616 : 48} = \frac{171}{617}$. Die Gründe hievon und dem Folgenden würden schwerlich verständlich sich hier vortragen lassen.

Anmerkung 2. Um Brüche leichter reduciren zu können, kann man sich überhaupt merken:

a) Alle Zahlen lassen sich durch 2 theilen, deren letzte Ziefer rechter Hand in 2 aufgeht.

b) Alle Zahlen lassen sich durch 3 theilen, deren Ziefern zusammenaddirt sich durch 3 ohne Rest theilen lassen, oder in deren Quersumme 3 aufgeht, auch durch 6, in deren Quersumme 6 aufgeht, und deren letzte Ziefer rechts grade oder 0 ist.

c) Alle Zahlen lassen sich durch 4 theilen, deren zwey letzte Ziefern rechter Hand eine Zahl ausmachen, in welcher 4 aufgeht; und durch 8, deren drey letzte Ziefern rechter Hand eine Zahl ausmachen, in welcher 8 aufgeht.

d) Alle Zahlen, die sich mit einem ungraden Zehner nebst 2 oder 6, oder mit einem graden Zehner nebst 0, oder 4 oder 8 enden, lassen sich durch 4 theilen.

e) Alle Zahlen lassen sich durch 5 theilen, deren letzte Ziefer rechter Hand 5 ist, oder in deren letzte Stelle rechter Hand 0 steht.

f) Alle Zahlen lassen sich durch 9 theilen, deren Quersumme in 9 aufgeht.

g) Alle Zahlen lassen sich durch 11 theilen, die entweder aus zwey gleichen Ziefern bestehn, z. B. 33, 44, oder aus drey, von welchen die Summe der ersten und letzten gleich der mittelsten ist, z. B. 462, 561, 792.

h) Alle Zahlen lassen sich durch 25 theilen, deren zwey letzte Ziefern 25 oder zwey Nullen sind.

Anmerkung 3. Im Rechnen muß man jeden Bruch so einfach als möglich ausdrücken.

Kapit-

Sechstes Kapittel.

Von den einfachen Rechnungsarten mit Brüchen.

§. 29.

Vom Addiren mit Brüchen.

Es können hier zwey Fälle eintreten.

1) Sind die Brüche gleichnamig, so addirt man nur die Zähler derselben, z. B. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$.

2) Haben die Brüche verschiedene Nenner, so werden sie erst gleichnamig gemacht nach §. 28, und dann addirt man die Zähler. Das dort gebrauchte Beyspiel ist

	24
$\frac{1}{2}$	12
$\frac{2}{3}$	16
$\frac{3}{4}$	18
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{5}{6}$	20
	69

also $\frac{69}{24} = 2 + \frac{21}{24}$.

Anmerkung. Ist die Summe ein uneigentlicher Bruch, so wird dieser durch die Division des Nenners in den Zähler in eine ganze Zahl und einen eigentlichen Bruch verwandelt.

§. 30.

§. 30.

Vom Subtrahiren der Brüche.

Auch hier finden sich zwey Fälle.

1) Bey gleichnamigen Brüchen wird nur der Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus abgezogen, und der Rest bekommt denselben Nenner, z. B. $\frac{6}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$.

2) Haben die gegebenen Brüche nicht einerley Nenner, so werden sie erst gleichnamig gemacht nach §. 28, und dann verfährt man wie in 1, z. B. $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14}{21} - \frac{9}{21} = \frac{5}{21}$.

§. 31.

Von der Multiplication der Brüche.

Nach der §. 18 gegebenen Erklärung der Multiplication wird es nicht befremden, wenn das Product zweyer eigentlicher Brüche kleiner ist als einer von den Factoren; denn zwey eigentliche Brüche mit einander multipliciren heißt: einen Bruch **kein ganzes mal** nehmen, sondern ein solches **Theil mal**, als der andere anzeigt. Wenn $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{7}$ sollen multiplicirt werden, so setze man erst, $\frac{2}{3}$ werde mit $\frac{1}{7}$ multiplicirt, oder $\frac{2}{3}$ solle $\frac{1}{7}$ mal genommen werden. Das Product muß also 7 mal kleiner seyn als $\frac{2}{3}$, folglich $= \frac{2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$ (§. 27. 2). Nun soll aber $\frac{2}{3}$ nicht $\frac{1}{7}$ mal, sondern $\frac{3}{7}$ mal genommeu werden, also muß das Product 3mal größer seyn als $\frac{2}{21}$, also $= \frac{2 \times 3}{21} = \frac{6}{21}$ (§. 27. 1). Hieraus fließt die Regel der Multiplication: **Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner**, dann ist das

Product

Product aus den Zählern der Factoren der Zähler des Products; und das Product aus den Nennern der Factoren der Nenner des Products, z. B. $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$.

Anmerkung. Hat der Zähler des einen Factors und der Nenner des andern einen gemeinschaftlichen Divisor, so kann man beide vor der Multiplication erst durch diesen dividiren, z. B. $\frac{5}{12} \times \frac{6}{35} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$.

§. 32.

Von der Division der Brüche.

Die Regel der Division wird sich leicht aus der Betrachtung eines besondern Falls finden lassen. Es soll $\frac{5}{7}$ durch $\frac{3}{5}$ dividirt werden. Es ist klar, daß das Ganze oder 1 in $\frac{5}{7}$ nicht ganz, sondern nur $\frac{5}{7}$mal enthalten ist. Nun ist aber $\frac{1}{5}$ fünfmal kleiner als 1; folglich muß $\frac{1}{5}$ in $\frac{5}{7}$ fünfmal mehr enthalten seyn als 1, also $\frac{5}{7} \times 5 = \frac{25}{7}$ mal. Aber $\frac{3}{5}$ ist dreymal so groß als $\frac{1}{5}$, folglich muß $\frac{3}{5}$ in $\frac{5}{7}$ dreymal weniger enthalten seyn, als $\frac{1}{5}$, folglich $\frac{5}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{21}$mal. Also ist

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{5} = \frac{5}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{21} = 1 + \frac{4}{21}.$$

Die Regel ist nun: **Man kehre den Divisor um, und multiplicire den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor;** oder man multiplicire des Dividendus Zähler mit des Divisors Nenner, und des Dividendus Nenner mit des Divisors Zähler, z. B.

$$\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{42}{40} = 1 + \frac{1}{10}.$$

Anmerkung. Wenn die Zähler des Dividendus und des Divisors oder ihre Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor

Divisor haben, so kann man vorher die Zähler durch ihren gemeinschaftlichen Divisor, und auch die Nenner durch den ihrigen dividiren, z. B. $\frac{21}{24} : \frac{7}{48} = \frac{3}{1} : \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{1} = 6$.

Siebentes Kapittel.

Von der Rechnung mit Brüchen und ganzen Zahlen.

§. 33.

Vom Addiren.

Sind Brüche vermischt mit ganzen Zahlen zu addiren, so addirt man erst die Brüche. Die Summe derselben ist nun entweder ein eigentlicher Bruch oder ein uneigentlicher oder eine ganze Zahl, die man auch als einen uneigentlichen Bruch, dessen Nenner 1 ist, betrachten kann. Der uneigentliche Bruch wird auf einen eigentlichen gebracht, und die ganze Zahl zu den ganzen Zahlen addirt, dann hat man sowohl die Summe der ganzen Zahlen, als auch der Brüche, z. B.

	14
$36\frac{1}{2}$	7
22	
$102\frac{4}{7}$	8
44	
$205\frac{1}{14}$	$\frac{15}{14} = 1 + \frac{1}{14}$.

§. 34.

§. 34.
Vom Subtrahiren.

1) Soll von einer ganzen Zahl ein eigentlicher Bruch abgezogen werden, so nimmt man von der ganzen Zahl eine Einheit ab, und giebt ihr die Gestalt eines Bruchs, indem man ihr zum Nenner 1 giebt. Von dieser wird der Bruch nach §. 30 abgezogen, z. B. $23 - \frac{2}{7} = 22 + 1 - \frac{2}{7}$. Nun ist $\frac{1}{1} - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$, also $23 - \frac{2}{7} = 22 + \frac{5}{7}$.

Sind mehrere Brüche abzuziehn, so müssen diese erst addirt werden nach §. 29, dann verfährt man mit ihrer Summe, wie oben.

2) Ist der Subtrahendus eine ganze Zahl und ein eigentlicher Bruch, so zieht man erst die ganze Zahl vom Minuendus ab, und darauf auch den Bruch.

$462 - (22 + \frac{3}{4})$. Nun ist $462 - 22 = 440$, und $440 - \frac{3}{4} = 439 + 1 - \frac{3}{4} = 439 + \frac{1}{4}$.

3) Sind Minuendus und Subtrahendus gemischte Zahlen, und der Bruch in dem erstern ist größer als im letztern; so zieht man diesen von jenem ab, und so auch die ganze Zahl des Subtrahendus von der des Minuendus, z. B. $(66 + \frac{1}{4}) - (22 + \frac{2}{7})$. Nun ist $\frac{1}{4} - \frac{2}{7} = \frac{5}{28}$, und $66 - 22 = 44$, also der Rest $= 44 + \frac{5}{28}$.

Ist aber der Bruch im Minuendus kleiner als der im Subtrahendus, so borgt man eine Einheit von der ganzen Zahl im Minuendus, indem man nach 1 verfährt. Das übrige bleibt wie in 3,

z. B. $(18+\frac{1}{5})-(6+\frac{2}{3})$. Nun ist $18+\frac{1}{5}=17+1+\frac{1}{5}=17+\frac{6}{5}$, und $\frac{6}{5}-\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$, und $17-6=11$, also der Rest $=11+\frac{4}{15}$.

§. 35.

Vom Multipliciren.

Es können hier vier Fälle eintreten. 1) ein Factor kann eine ganze Zahl der andere ein Bruch, 2) ein Factor eine ganze Zahl, der andere eine ganze Zahl nebst einem Bruch, 3) beide Factoren ganze Zahlen mit angehängten Brüchen, 4) der eine Factor ein Bruch, der andere eine ganze Zahl mit einem Bruche seyn. Ferner die angehängten Brüche können zu den ganzen Zahlen entweder zu addiren oder davon abzuziehen seyn. Für alle Fälle kann man sich merken, daß die ganzen Zahlen als uneigentliche Brüche können betrachtet werden, deren Nenner 1 ist. Nun addire oder subtrahire man die Brüche, die zu addiren oder zu subtrahiren sind nach §. 29 und 30, und multiplicire nach §. 31.

1) $332\times\frac{2}{3}=\frac{332}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{644}{3}=214+\frac{2}{3}$.

2) $22\times(6+\frac{1}{7})=22\times(\frac{6}{1}+\frac{1}{7})=\frac{22}{1}\times\frac{43}{7}$
$=\frac{946}{7}=135+\frac{1}{7}$

$22\times(6-\frac{1}{7})=22\times(\frac{6}{1}-\frac{1}{7})=\frac{22}{1}\times\frac{41}{7}$
$=\frac{902}{7}=128+\frac{6}{7}$.

3) $(62+\frac{1}{3})\times(21+\frac{2}{7})=(\frac{186}{3}+\frac{1}{3})\times(\frac{147}{7}$
$+\frac{2}{7})=\frac{187}{3}\times\frac{149}{7}=\frac{27863}{21}=1326+\frac{17}{21}$

$(62-\frac{1}{3})\times(21-\frac{2}{7})=(\frac{186}{3}-\frac{1}{3})\times(\frac{147}{7}$
$-\frac{2}{7})=\frac{185}{3}\times\frac{145}{7}=\frac{26825}{21}=1277+\frac{8}{21}$

4) $\frac{3}{5} \times (42 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{5} \times (\frac{84}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{5} \times \frac{85}{2} = \frac{255}{10} = 25 + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{5} \times (42 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{5} \times (\frac{84}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{3}{5} \times \frac{83}{2} = \frac{249}{10} = 24 + \frac{9}{10}$.

Anmerkung. $22 \times (6 + \frac{1}{7})$ oder $22\,(6 + \frac{1}{7})$ bedeutet, das, was in Klammern eingeschlossen ist, soll mit 22 multiplicirt werden. Man muß also die Zahlen in den Klammern erst auf eine Summe bringen, und diese mit 22 multipliciren. Wenn in den Klammern $6 - \frac{1}{7}$ steht, so muß man erst $\frac{1}{7}$ von 6 abziehen, und den Rest mit der vor der Klammer stehenden Zahl, hier mit 22, multipliciren. Uebrigens schreibt man gewöhnlich $6\frac{1}{7}$ statt $6 + \frac{1}{7}$; hier wählte ich der Deutlichkeit wegen den letzten Ausdruck. Eben so schreibt man gewöhnlich $62\frac{1}{3} \times 21\frac{2}{7}$ statt $(62 + \frac{1}{3}) \times (21 + \frac{2}{7})$.

§. 35.

Vom Dividiren.

Da die im vorigen §. angegebenen Fälle hier auch Statt finden können, und ausserdem im 1., 2. und 4. Fall man den einen oder den andern Factor für den Divisor annehmen kann, so kommen hier sieben verschiedene Fälle in Betracht. Uebrigens muß man beynahe dasselbe beobachten. Den ganzen Zahlen nämlich giebt man die Gestalt von Brüchen, deren Nenner 1 ist; ferner addirt oder subtrahirt man die Brüche, die addirt oder subtrahirt werden sollen, und wenn der Dividendus sowohl als der Divisor auf einen Bruch gebracht ist, so dividirt man nach §. 32.

1) $322 : \frac{1}{3} = \frac{322}{1} \times \frac{3}{1} = 966$.

2) $\frac{3}{5} : 22 = \frac{3}{5} : \frac{22}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{22} = \frac{3}{110}$.

3)

3) $211 : (22 + \frac{2}{3}) = 211 : (\frac{66}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{211}{1} : \frac{68}{3} = \frac{211}{1} + \frac{3}{68} = \frac{633}{68} = 9 + \frac{21}{68}$.
$211 : (22 - \frac{2}{3}) = 211 : (\frac{66}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{211}{1} : \frac{64}{3} = \frac{211}{1} \times \frac{3}{64} = \frac{633}{64} = 9 + \frac{57}{64}$.

4) $(12 + \frac{2}{3}) : 6 = (\frac{36}{3} + \frac{2}{3}) : 6 = \frac{38}{3} : \frac{6}{1} = \frac{38}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{38}{18} = 2 + \frac{1}{9}$.
$(12 - \frac{2}{3}) : 6 = (\frac{36}{3} - \frac{2}{3}) : 6 = \frac{34}{3} : \frac{6}{1} = \frac{34}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{34}{18} = 1 + \frac{8}{9}$.

5) $(433 + \frac{2}{3}) : (5 + \frac{1}{2}) = (\frac{1299}{3} + \frac{2}{3}) : (\frac{10}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1301}{3} : \frac{11}{2} = \frac{1301}{3} \times \frac{2}{11} = \frac{2602}{33} = 78 + \frac{28}{33}$.
$(433 - \frac{2}{3}) : (5 - \frac{1}{2}) = (\frac{1299}{3} - \frac{2}{3}) : (\frac{10}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1297}{3} : \frac{9}{2} = \frac{1297}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{2594}{27} = 96 + \frac{22}{27}$.

6) $\frac{3}{5} : (2 + \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} : (\frac{8}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} : \frac{9}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{45}$.
$\frac{3}{5} : (2 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} : (\frac{8}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} : \frac{7}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$.

7) $(3 + \frac{1}{2}) : \frac{2}{3} = (\frac{6}{2} + \frac{1}{2}) : \frac{2}{3} = \frac{7}{2} : \frac{2}{3} = \frac{7}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{4} = 5 + \frac{1}{4}$.
$(3 - \frac{1}{2}) : \frac{2}{3} = (\frac{6}{2} - \frac{1}{2}) : \frac{2}{3} = \frac{5}{2} : \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$.

Anmerkung. In den Beyspielen des 34. und 35. §. war und mußte meine Absicht seyn, so viel als möglich deutlich zu machen, wie nach und nach die gemischten Zahlen auf uneigentliche Brüche zu bringen sind, damit die Regeln des 30. und 31 § ihre Anwendung finden. Ein Lehrer, dem es darum zu thun ist, eine Regel zu erklären, muß auf jede Veränderung, die er mit den Zahlen vornimmt, seine Schüler aufmerksam machen, und dann erst Abkürzungen gebrauchen, und seinen Schülern Anweisung dazu geben, wenn sie das ganze Verfahren deutlich eingesehen haben.

Achtes Kapittel.

Von der Rechnung mit benannten Zahlen.

§. 37.

Vom Reduciren.

Benannte Zahlen sind Zahlen, deren Einheiten bestimmte Dinge sind; z. B. 3 Thaler, 4 Pfund u. s. w. Bey Geld, Gewicht und Maaß hat man im gemeinen Leben der Bequemlichkeit wegen höchste Einheiten angenommen, welche man wieder in bestimmte Theile getheilt, und diese Theile wieder als niedere Einheiten betrachtet hat. Diese Einheiten hat man wieder in bestimmte Theile getheilt, und diese Theile als Einheiten von einem noch niedrigerem Grade betrachtet, z. B. ein Louisd'or enthält 5 Thaler, ein Thaler enthält 72 Grote, ein Grote enthält 5 Schwaren. Ferner ein Schiffspfund enthält 20 Ließpfund; ein Ließpfund 14 Pfund; ein Pfund 32 Lothe oder 16 Unzen; ein Loth 4 Quentin. Ferner eine Last enthält 18 Tonnen; eine Tonne 8 Scheffel u. s. w.

Wenn man beim Rechnen die niedrigsten Einheiten in den Summen und Producten auf die möglichst höchsten zu bringen sucht; so erspart man sich nicht nur eine Menge Zahlen im Schreiben, sondern erleichtert sich auch die Rechnung und die

Ueber-

Uebersicht des Ganzen. Eine Summe in Louisd'or läßt sich leichter übersehen, als ebendieselbe in Schwaren.

§. 38.

Reduciren heißt: **niedrigere Einheiten auf höhere bringen.** Da nun jede höhere Einheit mehrere niedrigere enthält: so ist klar, daß eine höhere Einheit in einer Menge von niedrigeren Einheiten so vielmal muß enthalten seyn, als die Zahl, welche die Menge der niedrigeren Einheiten in der höhern ausdrückt, in dieser Menge von niedrigeren Einheiten enthalten ist. Dieses zeigt nun die Division. **Also geschieht das Reduciren durch das Dividiren.** Z. B. wären 276032 Schwaren gegeben, so brächte man diese Summe auf Grote durch die Division mit 5; die Summe der Grote auf Thaler durch die Division mit 72; die Summe der Thaler auf Louisd'or durch die Division mit 5.

§. 39.

Niedrigere Einheiten kann man auch als Brüche von höhern Einheiten betrachten, die zum Nenner die Zahl der niedrigeren Einheiten bekommen, welche in einer höhern enthalten sind; z. B. ein Thaler enthält 72 Grote, also sind 5 Grote einerley mit $\frac{5}{72}$ Thaler. Ferner ein Pfund enthält 32 Lothe, also sind 16 Lothe einerley mit $\frac{16}{32}$ Pfund oder mit $\frac{1}{2}$ Pfund. Solche Brüche entstehen häufig beym reduciren, wenn man nämlich den Divisor unter den Rest schreibt, z. B. 8723 Grote sollen auf Thaler reducirt werden, also $\frac{8723}{72} = 121 + \frac{11}{72}$ Thaler, oder 121 Thaler 11 Grote.

Ferner 600,000,000 Quentin geben mit 4 dividirt zum Quotienten eine Anzahl Pfunde, und einen Rest weniger als ein Loth; die Lothe durch 32 dividirt geben eine Anzahl Pfunde und einen Rest weniger als ein Pfund; die Pfunde durch 100 dividirt geben eine Anzahl Zentner und einen Rest weniger als ein Zentner. Die 600,000,000 Quentin würden sich also in eine Anzahl von Zentnern, Pfunden, Lothen und Quentin verwandeln.

§. 40.

Vom Resolviren.

Resolviren, heißt: **höhere Einheiten auf niedrigere bringen.** Da eine höhere Einheit mehrere niedrige Einheiten in sich hält, und da man, um zu erfahren, wieviel niedrigere Einheiten eine Anzahl höherer Einheiten enthält, diese mit der Zahl multipliciren muß, welche die Menge der niedrigeren Einheiten in der höhern ausdrückt: so versteht es sich von selbst, daß **die Resolution durch die Multiplication geschieht,** wenn z. B. 25 Thaler sollen zu Grote gemacht werden, so wird das Product 25×72 den Werth der Thaler in Groten geben, und das Product $25 \times 72 \times 5$ den Werth der Thaler in Schwaren. Eben so macht man es mit Brüchen von höhern Einheiten; $\frac{5}{6}$ Pfund sind $\frac{5 \times 32}{6}$ Lothe; und $\frac{5}{6}$ Rthlr. sind $\frac{5 \times 72}{6}$ Grote.

§. 41.

Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, daß bey benannten Zahlen nur die Dinge können addirt und von einander abgezogen werden, welche gleichnamig

namig sind. Sollen Pferde gezählt werden, so darf man in diese Summe keine Kühe bringen; zählt man Hollsteinische Pferde, so können in dieser Summe keine Ungarische enthalten seyn, wohl aber, wenn Pferde überhaupt sollten gezählt werden. Hausväter, Mütter, Kinder, Knechte und Mägde würden in eine Summe zu bringen seyn, wenn von Menschen überhaupt die Rede wäre, nicht aber, wenn man nach Hausvätern fragte. Es sind nun noch einige Bemerkungen zu machen, welche nur Vortheile im Rechnen, das Rechnen aber selbst nicht betreffen, weil benannte Einheiten die Natur der Zahlen nicht ändern.

§. 41.

Vom Addiren mit benannten Zahlen.

1) Alle gleichnamige Größen, welche summirt werden sollen, müssen unter einander in eine Kolumne gesetzt werden, so daß die Kolumne der höchsten Einheiten die erste Stelle linker Hand einnimmt, darauf rechts die Kolumnen der niedrigeren Einheiten nach ihren Ordnungen ihre Stellen bekommen, z. B. bey Geld-Summirungen kämen die Louisd'or in die erste Kolumne linker Hand; dann folgte rechts die Kolumne der Thaler; dann die der Grote und endlich die der Schwaren mit ihren Brüchen.

2) Nun werden die Brüche der niedrigsten Einheiten addirt, und ist ihre Summe ein uneigentlicher Bruch, so werden die darin enthaltenen Ganzen zu den niedrigsten Einheiten gesetzt, deren

Theile die Brüche waren, der eigentliche Bruch aber wird in die Summe unter die Stelle der Brüche geschrieben.

3) Dann werden die niedrigsten Einheiten summirt, ihre Summen auf die nächsthöhere reducirt, die Anzahl der darin enthaltenen höhern Einheiten zu den höhern Einheiten gesetzt, der Rest aber unter den Strich in die Summe unter den niedrigsten Einheiten geschrieben. So geht man immer zu höhern Einheiten fort, und beobachtet ebendasselbe, z. B.

3 Louisd.	4 Rthlr.	62 Gr.	$3\frac{1}{7}$ Schw.
4 —	2 —	50 —	$2\frac{1}{2}$ —
2 —	1 —	22 —	$1\frac{1}{3}$ —
10 —	3 —	63 —	$1\frac{41}{42}$ —

Es ist nämlich $\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{6}{42} + \frac{21}{42} + \frac{14}{42} = \frac{41}{42}$. Ferner $3 + 2 + 1 = 6$ Schw. oder 1 Grot 1 Schw.; und $62 + 50 + 22 + 1 = 135$ Grot oder $1\frac{35}{72}$ Rthlr. = 1 Rthlr. 63 gr.; und $4 + 2 + 1 + 1 = 8$ Rthlr. oder $\frac{8}{5}$ Louisd'or = 1 Louisd'or 3 Rthlr.

§. 42

Vom Subtrahiren mit benannten Zahlen.

Hier ist im allgemeinen folgendes zu bemerken. Nur gleichnamige Größen können von einander abgezogen werden. Fehlen im Minuendus Sorten (niedrige Einheiten), welche im Subtrahendus sind, oder fehlen einige in diesem, welche in jenem sind: so wird das Fehlende mit Null oder mit ( ) bemerkt. Im ersten Fall wird von der nächsthöhern

Sorte

Sorte eine Einheit geborgt, und in die niedrigeren Einheiten resolvirt §. 39, und statt der 0 oder dem (—) hingeschrieben. Im zweyten Falle ist von der Sorte im Minuendus nichts abzuziehen, sondern sie wird gleich zum Rest unter den Strich gesetzt. Man merke noch folgendes:

1) Mit der niedrigsten Sorte rechter Hand wird der Anfang gemacht.

2) Ist eine Sorte im Subtrahendus größer, als die über ihr stehende im Minuendus; so wird eine nächsthöhere Einheit geborgt, und auf die niedrigen Einheiten der kleinern Sorte gebracht zu dieser kleinern Sorte im Minuendus addirt. Die Sorte bey welcher geborgt ist, wird um eine Einheit kleiner, z. B. 7 Rthlr. 3 Gr.
abgezogen 2 — 24 —
würde, wenn man nach der Vorschrift verführe, so verändert werden:

6 Rthlr. 75 Gr.
2 — 24 —.

3) Sorten, von welchen nichts abzuziehen ist, werden unverändert unter den Strich in ihre ihnen zugehörige Stelle gesetzt; Sorten, welche sich aufheben, geben im Rest 0, z. B.

5 Zentner.	0 Pfund.	6 Loth.	3 Quentin.
2 —	24 —	0 —	2 —

schreibt man nach (2)

4 Zentner.	112 Pfund.	6 Loth.	3 Quentin.
2 —	24 —	0 —	2 —
2 —	88 —	6 —	1 —

und

6 Louisd.	3 Rthlr.	24 Gr.	3 Schw.
3 —	4 —	45 —	4 —

schreibt man

5 Louisd.	7 Rthlr.	95 Gr.	8 Schw.
3 —	4 —	45 —	4 —
2 —	3 —	50 —	4 —

§. 44.

Vom Multipliciren mit benannten Zahlen.

Es versteht sich, daß nur ein Factor eine benannte Zahl seyn kann. Es können 6 Thaler nicht 7 Thaler mal genommen werden, sondern 7 mal. Uebrigens beobachte man folgendes:

1) Die niedrigste Sorte im Multiplicandus wird zuerst mit der gegebenen Zahl multiplicirt, das Product auf die nächsthöhere Einheit reducirt, der Rest unter den Strich in die Stelle der niedrigsten Sorte gesetzt, der Quotient aber zur nächsthöhern Sorte addirt.

2) Darauf wird die nächsthöhere Sorte mit der gegebenen Zahl multiplicirt; zum Product der vorige Quotient addirt, das Ganze auf die nächsthöhere Sorte reducirt, der Rest in die Stelle der auf die niedrigste Sorte folgenden nächsthöhern Sorte gesetzt, und der Quotient angemerkt, um zu dem Producte aus der nächsthöhern Sorte in die gegebene Zahl addirt zu werden.

3) Diese beiden Regeln beobachtet man immer, indem man von niedrigeren Einheiten oder Sorten zu höhern übergeht, z. B. 32 Rthlr. 25 Gr. 2 Schw. sollen mit 18 multiplicirt werden.

1)

1) $18 \times 2 = 36$ Sch. od. $\frac{36}{5}$ Gr. od. 7 Gr. 1 Sch.

2) $25 \times 18 = 450$, und $450 + 7 = 457$ Grote oder $\frac{457}{72}$ Thaler oder 6 Rthlr. 25 Gr.

3) $32 \times 18 = 576$, und $576 + 6 = 582$ Rthlr., also das Product 582 Rthlr. 25 Gr. 1 Schw.

Anmerkung. Man kann auch so verfahren. Die höchste Sorte wird auf die nächstniedrige gebracht, und diese dazu addirt; das Ganze wieder auf die nächstniedrige, und diese dazu addirt u. s. w. bis alles auf die niedrigste Sorte gebracht ist. Dies wird nun mit der gegebenen Zahl multiplicirt, und das Product gehörig reducirt nach §. 37, z. B.

54 Louisd. 4 Rthlr. 36 gr. 2 schw. mit 22.

54
5
270
+4
274
72
548
1918
19728
+ 36
19764
5
98820
+ 2
98822
22
197644
197644
2174084

1) 5| 2174084| $434816\frac{4}{5}$
20
17
15
24
20
40
40
8
5
34
30
4

2) 72| 434816| $5039\frac{6}{72}$.
432
28
281
216
656
648
6

3) 5| 6039| $1207\frac{4}{5}$
5
10
10
3
39
35
4

also das Product 1207 Louisd. 4 Rthlr. 6 Gr. 4 Schw.

§. 45.

§. 45.
Vom Dividiren mit benannten Zahlen.

Wenn der Divisor eine benannte Zahl ist, so kann der Quotient keine benannte Zahl seyn, und wenn dieser eine benannte Zahl ist, so kann es jener nicht seyn. Der Divisor sey nun eine unbenannte Zahl: so kann man zwey Fälle betrachten.

1) Wenn der Divisor kleiner ist als die höchste Sorte, oder als die Zahl der höchsten Einheiten, dann wird

a) die höchste Sorte durch den Divisor dividirt, und der Quotient giebt die höchste Sorte im Quotienten des ganzen Dividendus; der Rest wird in die nächstniedrige Sorte resolvirt, und zu derselben addirt.

b) Die nächstniedrige Sorte mit dem, was dazu addirt ist, wird darauf mit dem gegebenen Divisor dividirt, der Quotient an seinen gehörigen Platz im Quotienten des ganzen Dividendus gesetzt, der Rest aber in die nächstniedrige Sorte resolvirt, und zu derselben addirt.

c) Dies Verfahren setzt man bis zur niedrigsten Sorte fort, z. B. 8 Louisd. 4 Rthlr. 36 Gr. 2 Schw. soll mit 3 dividirt werden, also $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$; es bleiben 2 Louisd. oder 10 Rthlr. über; nun ist $10 + 4 = 14$, und $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$, der Rest 2 Rthlr. oder $72 . 2 = 144$ Gr. und $144 + 36 = 180$, und $\frac{180}{3} = 60$ Gr. Also ist der ganze Quotient 2 Louisd. 4 Rtr. 60 Gr. $\frac{2}{3}$ Schw.

2)

2) Wenn der Divisor größer ist als die Zahl der Einheiten in der höchsten oder auch in mehrern Sorten.

Der ganze Dividendus wird in die niedrigste Sorte resolvirt, darauf dividirt man mit dem gegebenen Divisor. Der Rest giebt einen Bruch der niedrigsten Sorte, der Quotient aber Einheiten derselben, welche dann auf höhere Einheiten zu reduciren sind; z. B. 1 Louisd. 3 Rthlr. 22 Gr. 3 Schw. soll mit 5 dividirt werden,

8	5 | 2993 ($598\frac{3}{4}$ sch.	5 | 598 ($119\frac{4}{5}$ gr.	72 | 119 ($1\frac{47}{72}$ R.
72	25	5	72
576	49	9	47
+22	45	5	
598	43	48	
5	40	45	
2990	3	3	
+3			
2993			

also der Quotient 1 Rthlr. 47 Gr. $4\frac{3}{4}$ Schw.

Anmerkung. Dies zweite Verfahren kann auch oft im ersten Falle bequemer seyn.

Sind Dividendus und Divisor benannte Zahlen, so müssen beide auf die niedrigste Sorte gebracht werden, die in beiden oder auch in einem von beiden sich befindet. Dann wird dividirt, und der Quotient gehörig reducirt.

Anhang zum achten Kapittel.

Wenn Jahr, Tag und Stunde der Geburt und des Todes eines Menschen bekannt ist, und man will sein erreichtes Alter daraus berechnen: so nehme man immer den nächstvorhergehenden Monat,

nat, und den nächstvorhergehenden Tag, der von Mitternacht an gerechnet wird, setze anstatt der Monate die Zahlen, welche ausdrücken, die wievieltesten Monate es in dem Jahre sind, und **ziehe von der Sterbezeit die Geburtszeit ab.** Nun ist

1	2	3	4	5	6	7
Januar,	Februar,	März,	April,	May,	Junius,	Julius,
8	9	10	11	12		
August,	September,	October,	November,	December.		

In Rücksicht des Borgens muß man sich merken, daß der 1., 3., 5., 7., 8., 10, 12. Monat 31 Tage haben, der 2. aber 28, und wenn es ein Schaltjahr ist 29 Tage; die übrigen 30 Tage. Ein Schaltjahr ist jedes Jahr, welches durch 4 ohne Rest kann dividirt werden, mit Ausnahme von den Jahren, welche am Ende zwey Nullen haben, wie 1800, diese sind nur Schaltjahre, wenn die Zahl der beiden ersten Stellen linker Hand sich durch 4 ohne Rest theilen lassen, wie 2400, 2000 u. s. w.

Aufgabe. A ist geboren 1745 den 8. August Abends um 6 Uhr, starb 1789 den 4. Sept. Morgens um 9 Uhr; wie alt ist A nun geworden?

Sterbezeit.	1789 J.	8 M.	3 T.	18 St.
Geburtszeit.	1745 –	7 —	8	9 —
Erreichtes Alter.	44 Jahr.		26 Tage	9 St.

Man mußte hier den 8. Monat borgen, und der hat 31 Tage, folglich $31 + 3 - 8 = 26$.

Das erreichte Alter zur Geburtszeit addirt, giebt die Sterbezeit.

	1745 J.	7 M.	8 T.	9 St.
	44 –		26 –	9 –
Sterbezeit.	1789 Jahr.	8 Mon.	3 Tage	18 St.

Die Zahl der Tage war 34, und hierin war ein ganzer Monat enthalten; weil nun der 8. Monat 31 Tage hat, so blieben 3 Tage, und der Monat wurd zu den 7 Monaten addirt.

Das erreichte Alter von der Sterbezeit abgezogen, giebt die Geburtszeit.

	1789 J.	8 M.	3 T.	18 St.
	44 –		26 –	9 —
Geburtszeit.	1745 Jahr.	7 Mon.	8 Tage.	9 —

Hier wurd der 8. Monat geborgt, welcher 31 Tage enthält. Wollte man die Anzahl der Tage, die jemand erlebt hat, genauer wissen, so müßten zu den Tagen, worin die Jahre verwandelt sind, noch die Schalttage gezählt werden, diese giebt aber die ganze Zahl des Quotienten, wenn die Zahl der Jahre durch 4 dividirt wird. Ist aber unter der Anzahl der Jahre ein Jahr, dessen Zahl am Ende zwey Nullen hat, und dessen zwey erste Stellen linker Hand sich nicht durch 4 ohne Rest theilen lassen, wie 1800, so muß man die Zahl der Schalttage um Eins vermindern.

Neuntes Kapittel.

Erste Gründe der Lehre von den Gleichungen.

§. 46.

Eine Größe ist sich selbst gleich, und **Ein Ganzes ist seinen Theilen zusammengenommen gleich**, sind Sätze, die man eben so wenig beweisen kann, als man eines Beweises dafür bedarf. Auch wird folgendes begreiflich seyn **Eine jede Größe läßt sich auf mannigfaltige Arten in Theile zerlegen, und die Theile, worin eine Größe auf eine Art zerlegt ist, sind zusammen den gesammten Theilen gleich, worin die Größe auf eine andere Art zerlegt ist**, z. B. $11 = 11$, und $6+5 = 4+7$. Ferner da $6 = 8-2$; $4 = 6-2$; so ist auch, dies statt 6 nnd 4 gesetzt, $8-2+5 = 6-2+7$. Nun ist $8 = 2\times 4$, und $6 = 3\times 2$; also auch $2\times 4-2+5 = 3\times 2-2+7$. Ferner ist $2\times 4-2 = (4-1)\,2$, und $3\times 2-2 = (3-1)\,2$, also ist auch $(4-1)\,2+5 = (3-1)\,2+7$. Da auch $5 = \frac{12-2}{2}$ und $7 = \frac{18-4}{2}$, so ist auch $(4-1)\,2+\frac{12-2}{2} = (3-1)\,2+\frac{18-4}{2}$. Kurz, die Theile, worin eine Größe zerlegt ist, können durch alle Zeichen der vier einfachen Rechnungsarten unter sich verbunden seyn, und durch die Anwendung derselben lassen sich die Theile wieder auf ein Gan-

Ganzes zurückführen, z. B. $(4-1)\,2 = 3 \times 2 = 6$; $\frac{12-2}{2} = \frac{10}{2} = 5$, und $6 + 5 = 11$; eben so $(3-1)\,2 = 2 \times 2 = 4$; und $\frac{18-4}{2} = \frac{14}{2} = 7$, und $4+7 = 11$, also $11 = 11$.

§. 47.

Solche Zahlen, vor welchen ein (—) steht, kann man als solche betrachten, die von andern, vor welchen ein (+) steht, abgezogen werden müssen. Da man nun alle mit (+) bezeichnete Zahlen zusammenaddiren, und von dieser Summe die Summe der Zahlen, vor welchen ein (—) steht, abziehen kann: so ist die Ordnung, worin die mit (+) und (—) bezeichneten Zahlen stehen, gleichgültig, und es ist einerley, ob man $6 - 2 + 4$, oder $4 - 2 + 6$, oder $4 + 6 - 2$ schreibt. Das Zeichen (+) wird vor der ersten Zahl linker Hand gewöhnlich ausgelassen, und statt $+8 - 2$ schreibt man $8 - 2$.

§. 48.

Einen doppelten Ausdruck derselben Größe nennt man eine **Gleichung**. Das, was auf der einen oder der andern Seite des Gleichheitszeichens (=) steht, heißt die **Hälfte der Gleichung**; und die Zahlen, vor welchen entweder (+) oder (—) steht, heißen **Glieder der Gleichung**. Unter diesen Gliedern können sich ein oder mehrere befinden, welche entweder ganz, oder zum Theil unbekannt sind. Das Unbekannte wird mit x bezeichnet. Kommt in einer Gleichung dieses x mit sich selbst multiplicirt vor, also xx; so nennt man sie eine Gleichung vom zweiten Grade; befindet sich in einer xxx; so nennt man sie eine Gleichung vom dritten Grade u. s. w. In dem folgenden wird nur von Gleichungen des ersten Grades die Rede seyn.

Anmerkung. Wenn man Zahlen allgemein durch Buchstaben ausdruckt, so setzt man die Factoren eines Products ohne Multiplicationszeichen neben einander; so bedeutet ab ein Product aus den beiden Factoren a und b; xx ein Product aus den beiden gleichen Factoren x und x; abc ein Product, aus den drey Factoren a und b und c; xxx ein Product aus den drey gleichen Factoren x und x und x. Und $\frac{a}{b}$ drückt aus, eine Zahl a, durch b dividirt; $\frac{cm}{d}$ ein Product aus den Factoren c und m durch d dividirt; man könnte dieses auch a : b; cm : d schreiben.

§. 49.

Wenn a, b, c jede bekannte, einfache oder zusammengesetzte Zahl bedeuten; so kann das unbekannte x mit den bekannten Zahlen auf folgende mögliche Arten verbunden seyn.

1) $x \pm a = c.$ 4) $\frac{b}{x} \pm a = c.$

2) $xb \pm a = c.$ 5) $\frac{dx}{b} \pm a = c.$

3) $\frac{x}{b} \pm a = c.$ 6) $\frac{b}{dx} \pm a = c.$

Das Zeichen ($\pm$) bedeutet einen doppelten Fall, man kann entweder (+) oder (—) annehmen. Könnte man nun eine Gleichung nach und nach so verändern, daß das unbekannte x auf der einen Seite des Gleichheitszeichen, alles bekannte auf der andern Seite desselben zu stehen käme, ohne daß durch diese Veränderung beide Hälften der Gleichung aufgehört hätten sich gleich zu seyn: so dürfte

dürfte man nur die bekannten Theile, nach ihren Zeichen, womit sie unter sich verbunden sind, auf ein Ganzes zurückbringen, und dies müßte der Werth der unbekannten Größe seyn; z. B. wäre die Gleichung $2x + 4 = 12$ gegeben, und man könnte aus unzubezweifelnden Gründen überzeugt seyn, daß, ohne die Gleichheit beider Hälften aufzuheben, die gegebene Gleichung in $x = \frac{12-4}{2}$ wäre verwandelt worden: so wäre, da $12 - 4 = 8$ ist, und $\frac{8}{2} = 4$, der Werth der unbekannten Größe gefunden, und $x = 4$. Daß dieses so sey, kann man sehen, wenn man 4 statt x in die gegebene Gleichnng setzt, dann ist $2 \times 4 + 4 = 12$, oder da $2 \quad 4 = 8$ ist, $8 + 4 = 12$, oder $12 = 12$.

§. 50.

Es ist aber möglich eine Gleichung auf diese Weise zu verändern, oder alles bekannte auf eine Seite des Gleichheitszeichen zu bringen, ohne daß die Gleichung aufhört eine Gleichung zu seyn. Die Vorschriften dazu gründen sich auf folgende Sätze, die ein jeder auch ohne Beweis einleuchtend finden wird.

1) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn zu beiden gleiches addirt wird,** z. B.

$$\begin{array}{l} 18 + 4 = 22. \\ \quad + 4 \quad\; + 4. \\ \hline 18 + 4 + 4 = 22 + 4 \text{ oder } 26 = 26. \end{array}$$

2) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn von beiden gleiches abgezogen wird,** z. B. $18 + 4 = 22.$

$$\begin{array}{l} \hline \quad - 4 \quad - 4. \\ 18 + 4 - 4 = 22 - 4 \text{ oder } 18 = 18. \end{array}$$

3) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn sie mit gleichem multiplicirt werden,** z. B. $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{9}{3} \times 3 = 3 \times 3$ oder $9 = 9$.

4) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn sie durch gleiches dividirt werden,** z. B. $4 \times 8 = 32$; $\frac{4 \times 8}{4} = \frac{32}{4}$ oder $8 = 8$.

§. 51.

Da nun die ganz bekannten Glieder der Gleichung mit der unbekannten Größe entweder durch (+) oder (—) verbunden sind, und das bekannte in den zum Theil unbekannten Gliedern entweder als Factor oder als Divisor mit x verbunden ist: so kann man durch Anwendung der im vorigen §. angeführten Grundsätze alles bekannte auf eine Seite des Gleichheitszeichen bringen, ohne daß die Gleichheit darunter leidet, und dadurch den Werth von x finden. Die Buchstaben a, b, c, d, mögen wieder das bedeuten, was sie oben bedeuteten. Man wird nun leicht einsehen können, daß $b - b = 0$ sey, eben so wie $2 - 2 = 0$ ist. Aus jenen Grundsätzen lassen sich unmittelbar folgende drey Sätze herleiten, mit deren Hülfe man jede Gleichung, worin bloß x, aber nicht mit sich selbst multiplicirt (jede einfache Gleichung) und sonst keine unbekannte Größe vorkommt, auflösen, d. h. den Werth von x finden kann. Das entgegengesetzte Zeichen von (+) ist (—), und so umgekehrt.

1) **Alle Glieder, vor welchen ein (+) oder ein (—) steht, lassen sich, ohne daß die Gleichung darunter leidet, mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite des**

des Gleichheitszeichen bringen. Dies folgt aus §. 50, 1 und 2.

1) $\begin{array}{r} x - a = c \\ + a \quad + a \\ \hline x = c + a \end{array}$ also $x - a = c$, und $x = c + a$.

2) $\begin{array}{r} x + a = c \\ - a - a \\ \hline x = c - a. \end{array}$ also $x + a = c$, und $x = c - a$.

2) **Der Factor eines Products kann weggeschafft werden, ohne daß die Gleichung darunter leidet, wenn man alle Glieder der Gleichung durch diesen Factor dividirt.** Dies folgt aus §. 50, 4.

2) $xb \pm a = c$

$xb = c \mp a$ nach dem vorigen Satze, und

$\frac{xb}{b} = \frac{c \mp a}{b}$ oder $x = \frac{c \mp a}{b}$, da $\frac{b}{b} = 1$.

3) **Der Divisor eines Gliedes kann weggeschafft werden, ohne daß die Gleichung darunter leidet, wenn man alle Glieder der Gleichung mit diesem Divisor multiplicirt.** Dies folgt aus §. 50, 3.

3) $\frac{x}{b} \pm a = c$

$\frac{x}{b} = c \mp a$ nach 1, und nach 3

$\frac{xb}{b} = (c \mp a)\, b$ oder $x = (c \mp a) b$, da $\frac{b}{b} = 1$.

Die übrigen drey Formen von einfachen Gleichungen §. 49 lassen sich auch leicht mit Hülfe dieser drey Sätze auflösen.

4) $\frac{b}{x} \pm a = c$; $\frac{b}{x} = c \mp a$ nach 1; $b = (c \mp a)\, x$ nach 3; und endlich $\frac{b}{c \mp a} = x$ nach 2.

5) $\frac{dx}{b} \pm a = c$; $\frac{dx}{b} = c \mp a$ nach 1; $dx = (c \mp a)\, b$ nach 3, und endlich $x = \frac{(c \mp a) b}{d}$ nach 2.

6) $\frac{b}{xd} \pm a = c$; $\frac{b}{xd} = c \mp a$ nach 1; $b = (c \mp a)\, xd$ nach 3, und endlich $\frac{b}{(c \mp a) d} = x$ nach 2.

Anmerkung. Wenn sich die unbekannte Größe, oder x, in mehreren Gliedern befindet, entweder in einer oder in beiden Hälften der Gleichung, so werden diese Glieder zusammen auf eine Seite des Gleichheitszeichen gebracht, so daß auf der andern Seite die bekannten Glieder stehen, und die ganz oder zum Theil unbekannten Glieder werden als ein Product ausgedruckt, wovon ein Factor x, der andere eine bekannte zusammengesetzte Größe ist, z. B.

$$\begin{array}{rcll} ax + b & = & c + dx & \\ -\,b & & -\,b & \text{nach 1,} \\ \hline ax & = & c - b + dx & \\ -\,dx & & -\,dx & \text{nach 1,} \\ \hline ax - dx & = & c - b & \\ (a-d)\,x & = & c - b & \\ x & = & \frac{c-b}{a-d} & \text{nach 2.} \end{array}$$

Man kann in den angeführten Fällen statt a, b, c jede Zahl setzen, die man will, nur muß, wenn man + a, + b, + c annimmt, a allezeit kleiner als c seyn, sonst würden die Sätze etwas enthalten, was nicht statt finden kann, oder ungereimt wäre. Wenn man z. B. setzte $x + 2 = 1$, so sieht man leicht, daß der Satz ungereimt ist; er hieße nämlich in Worten ausgedruckt: man solle eine Zahl finden, die zu 2 addirt 1 gäbe. Von entgegengesetzten Größen ist hier nicht die Rede. In dem Beyspiel der Anmerkung muß, wenn $d < a$ ist, auch $b < c$ seyn, und wenn $d > a$ ist, auch $b > c$ seyn. Hier ist $d < a$, und $b < c$ angenommen.

Zehn-

Zehntes Kapittel.

Von Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

§. 52.

Von zwey Zahlen, die mit einander verglichen, nicht gleich sind, ist die eine allezeit grösser als die andere. Aus der Vergleichung der Zahlen unter einander oder mit der Einheit entsteht erst der Begriff von großen und kleinen Zahlen, z. B. 4 ist klein mit 1000 verglichen, aber 4 ist groß mit $\frac{1}{1000}$ verglichen. Die Bestimmung der Größe einer Zahl nach der Größe einer andern nennt man das Verhältniß dieser Zahl zur andern.

§. 53.

Von zwey Zahlen, deren Größe man so bestimmt, kann man sich vorstellen, daß die eine aus der andern entstanden sey, und zwar entweder

a) durch die Addition, die größere aus der kleinern, z. B. 4, 6, also 6 aus 4; denn $6 = 4 + 2$.

b) durch die Subtraction, die kleinere aus der größern, z. B. 4 aus 6, indem $4 = 6 - 2$. Oder

a) durch die Multiplication, die größere aus der kleinern, z. B. 16 aus 2, denn $16 = 2 \times 8$.

b) durch die Division, die kleinere aus der größern, z. B. 2 aus 16, denn $2 = \frac{16}{8}$.

§. 54.

Es giebt also ein doppeltes Verhältniß worin zwey Zahlen mit einander stehen können, indem man sich die Entstehung der einen Zahl aus der andern entweder durch die Addition und Subtraction, oder durch die Multiplication und Division denkt. Das erste wird ein **arithmetisches**, das andere ein **geometrisches** Verhältniß genannt. Die Benennungen sagen im Grunde nichts, sie sollen nur den Unterschied beider Verhältnisse ausdrücken. Bey einem arithmetischen Verhältniß sucht man durch die Subtraction, um **wieviel** die eine Zahl größer als die andere sey; der Unterschied heißt die **Differenz**, und der Ausdruck des Verhältnisses ist 6 — 8 oder 8 — 6; die Differenz ist 2. Bey einem geometrischen Verhältniß sucht man durch die Division, um **wievielmal** die eine Zahl größer als die andere sey; der Quotient heißt der **Exponent** (Name) **des Verhältnisses** und der Ausdruck des Verhältnisses ist 3 : 18; oder 18 : 3. Der Exponent ist 6 oder $\frac{1}{6}$.

§. 55.

Jedes Verhältniß besteht aus zwey Gliedern. Zwey arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die Differenz in beiden gleich ist, z. B. 6 — 2 und 8 — 4. Zwey geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn die Exponenten der Verhältnisse gleich sind, z. B. 3 : 6 und 4 : 8. Zwey gleiche Verhältnisse machen eine Proportion aus, also zwey arithmetische eine arithmetische, zwey geometrische eine geometrische. Der Ausdruck von jener ist z. B.

$6 - 2 = 8 - 4$. Der Ausdruck von dieser ist $3 : 6 = 4 : 8$. Jede Proportion besteht also aus vier Gliedern. In der Folge wird nur von geometrischen Proportionen die Rede seyn.

§. 56.

Wenn ein Verhältniß gegeben, also der Exponent des Verhältnisses bekannt ist §. 54: so läßt sich für jede gegebene Zahl ein Verhältniß finden, welches dem gegebenen gleich ist; denn man darf nur die gegebene Zahl mit dem Exponenten des gegebenen Verhältnisses multipliciren, so ist das zweite Glied des zweiten Verhältnisses gefunden, z. B. das gegebene Verhältniß sey $3 : 18$, der Exponent des Verhältnisses also 6, die gegebene Zahl sey 5, so ist 5×6 oder 30 das zweite Glied des zweiten Verhältnisses, und $3 : 18 = 5 : 30$ nach §. 55.

§. 57.

Unter dem Ausdruck $\frac{12}{4}$ versteht man den Quotienten, der herauskommen würde, wenn man 12 durch 4 dividirte. Jedes einfache Verhältniß kann man wie einen Quotienten ausdrücken; also $3 : 18$ kann man ausdrücken durch $\frac{3}{18}$. Man kann also auch eine Proportion, z. B. $2 : 6 = 5 : 15$ so schreiben $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$.

Nun ist nach § 27, 3; $\frac{2 \times 15}{6 \times 15} = \frac{5 \times 6}{15 \times 6}$,

also auch nach § 50, 3; $2 \times 15 = 5 \times 6$.

Oder: **das Product der beiden äusern Glieder in einer geometrischen Proportion ist gleich dem Producte der beiden mittlern.** Dieses zeigt sich auch auffallend in jeder Proportion, worin der Exponent des Verhältnisses eine ganze Zahl ist, z. B.

$3:18 = 5:30$ oder
$3:3 \times 6 = 5:5 \times 6$ und
$3 \times 5 \times 6 = 3 \times 5 \times 6.$

§. 58.

Durch den gefundenen Satz läßt sich jede gegebene Proportion in eine Gleichung verwandeln, und dadurch ist man im Stande, wenn drey Glieder in einer Proportion gegeben sind, das vierte zu finden. Um dies zu erläutern soll ein Glied nach dem andern in der Proportion $3:18 = 4:24$ als unbekannt angenommen, und mit Hülfe jenes Satzes durch eine Gleichung gefunden werden.

1) $x:18 = 4:24$
$x \times 24 = 18 \times 4$, also nach §. 50, 4
$x = \frac{18 \times 4}{24} = 3.$

2) $3:x = 4:24$
$3 \times 24 = x \times 4$, und nach §. 50, 4
$x = \frac{3 \times 24}{4} = 18.$

3) $3:18 = x:24$
$3 \times 24 = 18 \times x$, und nach §. 50, 4
$x = \frac{3 \times 24}{18} = 4.$

4) $3:18 = 4:x$
$3 \times x = 18 \times 4$, also nach §. 50, 4
$x = \frac{18 \times 4}{3} = 24.$

§. 59.

Da der Exponent des Verhältnisses immer derselbe bleibt, wenn man beide Glieder eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt; oder da, wenn man das Verhältniß $3:9$ so ausdrückt $\frac{3}{9}$ §. 57, und $\frac{3}{9} = \frac{3 \times 8}{9 \times 8} =$
$\frac{3}{9}$

$\frac{3:3}{9:3}$ ist: so bleibt ein Verhältniß ungeändert, wenn man beide Glieder mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt. Hieraus folgt

1) Daß man jedes Verhältniß, dessen Glieder Brüche oder ganze Zahlen mit angehängten Brüchen sind, in ein Verhältniß verwandeln kann, dessen Glieder ganze Zahlen sind. Man multiplicirt nämlich die ganzen Zahlen mit dem Product aus den Nennern der Brüche, und jedes Bruchs Zähler mit dem Nenner des andern Bruchs.

$3\frac{1}{5} : 4\frac{2}{3}$ ist $48:70$ denn
$3 + \frac{1}{5} : 4 + \frac{2}{3} = 3 \times 3 + \frac{3}{5} : 4 \times 3 + 2 =$
$3 \times 3 \times 5 + 3 : 4 \times 3 \times 5 + 2 \times 5 =$
$45 + 3 : 60\ 10 + = 48:70.$

a) Wenn eines Bruches Nenner in dem Nenner des andern Bruchs aufgeht, so braucht man nur mit dem größern Nenner die beiden ganzen Zahlen und des Bruches Zähler zu multipliciren, dessen Nenner in dem Nenner des andern aufgeht.

$2\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} = 10:27$, denn $2 + \frac{1}{2} : 6 + \frac{3}{4} = 2$
$\times 4 + \frac{4}{2} : 6 \times 4 + 3 = 8 + 2 = 24 + 3 =$
$10:27.$

b) Ist nur ein Glied ein Bruch, oder eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch, so werden beide Glieder mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt.

$1\frac{1}{3} : 6$ ist $4:18$, denn $1 + \frac{1}{3} : 6 = 3 + 1 :$
$6 \times 3 = 4:18.$

c) Sind beide Glieder bloße Brüche, so multiplicirt man jedes Bruches Zähler mit des andern Nenner.

$\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$ ist $15:6$, denn $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6}{}^{\times 3} : \frac{3}{3} =$
$5 \times \frac{3}{6} \times 6 : 3 \times \frac{6}{3} = 15:6.$

2) Es

2) Es folgt ferner daraus, daß man ein jedes Verhältniß, dessen Glieder einen gemeinschaftlichen Divisor haben, einfacher ausdrücken kann, wenn man beide Glieder mit diesem Divisor dividirt, z. B. $3:18 = \frac{3}{3}:\frac{18}{3} = 1:6$.

§. 60.

Wenn $3:6 = 5:10$ ist, so ist auch $3 \times 10 = 6 \times 5$ (§. 57); und auch $\frac{3 \times 10}{5 \times 10} = \frac{6 \times 5}{5 \times 10}$ (§. 50. 4) also auch $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (§. 27. 6) oder $3:5 = 6:10$ (§. 57). **Man kann also die mittlern Glieder einer Proportion verwechseln, ohne daß die Proportion dadurch geändert wird.** Befindet sich daher auch im dritten Gliede ein Bruch, so darf man, um diesen wegzuschaffen, mit dem ersten und dritten Gliede so verfahren, wie man mit dem ersten und zweiten im vorigen §. verfuhr, z. B.

1) $1:3 = 4\frac{1}{2}:x$ ist
$2:3 = 9:x$

2) $\frac{2}{3}:1\frac{1}{2} = \frac{1}{5}:x$ ist
$\frac{4}{3}:3 = \frac{1}{5}:x$ und $20:9 = 1:x$.

Es lassen sich überhaupt mit den Gliedern einer Proportion alle mögliche Veränderungen vornehmen, ohne daß die Proportion dadurch geändert wird, wenn nur das Product der beiden äusern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich bleibt. §. 57.

§. 61.

Aus zwey Proportionen kann man durch die Multiplication der Glieder eine dritte machen, z. B.

$$5 : 15 = 3 : 9$$
$$2 : 8 = 4 : 16$$
$$10 : 120 = 12 : 144.$$

Denn $\frac{15}{5} = \frac{9}{3}$ und $\frac{8}{2} = \frac{16}{4}$ nach §. 57, also auch $\frac{15}{5} \times \frac{8}{2} = \frac{9}{3} \times \frac{16}{4}$ nach §. 50. 3, und hieraus $5 \times 2 : 15 \times 8 = 3 \times 4 : 9 \times 16$. Also auch aus drey, vier und mehrern Proportionen eine einzige. Wenn man folgende Proportionen hat

$$3 : 4 = 5 : a$$
$$1 : 6 = a : b$$
$$5 : 2 = b : c$$
$$3 : 7 = c : x$$

so daß das letzte Glied der vorhergehenden immer das dritte Glied in der folgenden ist, so hat man $3 \times 1 \times 5 \times 3 : 4 \times 6 \times 2 \times 7 = 5 \times a \times b \times c : a \times b \times c \times x$. Nun mögen a, b, c Zahlen bedeuten, welche man will, so ist doch immer $a \times b \times c = a \times b \times c$; folglich ist $5 \times a \times b \times c : a \times b \times c \times x = 5 : x$ nach §. 59; und es ist $3 \times 1 \times 5 \times 3 : 4 \times 6 \times 2 \times 7 = 5 : x$.

Eilftes Kapittel.

Von der Anwendung der einfachen Proportion oder von der Regeldetri.

§. 62.

Wenn ein Maaß oder ein Gewicht von einer Waare einen bestimmten Preis hat, so stehen alle Maaßen

Maaßen und Gewichte dieser Waare in einem Verhältniß, so daß man nach einem gegebenen Verhältniß von zwey Maaßen oder Gewichten der Waare, wenn zugleich der Preis des einen Maaßes oder Gewichtes bestimmt ist, den Preis des andern Maaßes oder Gewichtes finden kann. Und so läßt sich umgekehrt das Verhältniß von zwey Maaßen oder Gewichten aus dem gegebenen Verhältnisse ihrer Preise bestimmen. Es giebt unzählig viele Fälle, worauf sich die Proportion anwenden läßt, nur muß allezeit die Größe in dem einen Verhältniß mit der in dem andern entweder zu- oder abnehmen oder ab- oder zunehmen. Man kann nicht sagen: wie sich ein Pferd zu sechs Pferde verhält, so verhält sich die Zeit, worin ein Pferd läuft, zu der, worin sechs Pferde laufen; denn sechs Pferde laufen nicht schneller als ein Pferd. In jedem von den hierhergehörenden Fällen muß ein Verhältniß gegeben seyn, und zugleich das erste Glied des zweiten Verhältnisses, und aus diesen drey Gliedern der Proportion soll das vierte gefunden werden; z. B. der Verkauf von 5 Tonnen einer Waare bringt einem Kaufmann 6 Rthlr. Profit, welchen Profit wird er von dem Verkauf von 53 Tonnen haben. Das gegebene Verhältniß ist 5 Tonnen : 53 Tonnen. Das erste Glied des zweiten Verhältnisses ist 6 Rthlr., das zweite Glied des zweiten Verhältnisses wird gesucht; also 5 Tonnen : 53 Tonnen = 6 Rthlr. : x Rthlr. Das vierte Glied ist der Quotient aus dem Product der beiden mittlern Glieder durch das erste dividirt nach §. 58. 4; also $\frac{53 \times 6}{5} = 63\frac{3}{5} = x$.

Anmerkung. Das zweite Verhältniß, wovon das erste Glied gegeben, das zweite gesucht wird, soll das zu bestimmende Verhältniß heißen. In den Rechenschulen heißt es gewöhnlich: 5 Tonnen geben 6 Rthlr. Profit, wieviel 53 Tonnen?

5 Tonnen —— 6 Rthlr. —— 53 Tonnen?

In Rücksicht der Rechnung giebt dieses keinen Unterschied, da die beiden mittlern Glieder in einer Proportion verwechselt werden können §. 60. Man kann aber nicht sagen, daß Tonnen und Thaler in einem Verhältnisse stehen, indem Tonnen nicht in Thalern, und Thaler nicht in Tonnen enthalten sind. Die mathematische Ordnung erleichtert auch das Auffinden der Verhältnisse, und zeigt, in welchen Fällen die Regeldetri angewandt werden könne oder nicht.

§. 63.

In allen Aufgaben, welche sich durch die einfache Proportion auflösen lassen, müssen zwey Verhältnisse vorkommen, von welchen jedes gleichnamige Glieder hat, wenigstens müssen diese Glieder Sorten von Maaß oder Gewicht oder Münzen seyn, die auf einerley Einheiten gebracht werden können, das heißt: die Einheiten des einen Gliedes müssen wenigstens in den Einheiten des andern Gliedes enthalten seyn, damit die Glieder gleichnamig gemacht werden können. Wenn es heißt: 1 Zentner kostet 4 Rthlr., wieviel Grote kosten 3 Pfund? so muß man die Thaler zu Grote, und den Zentner zu Pfunde machen. Ist also eine Sorte in einem Gliede eines Verhältnisses höher als in dem andern: so wird die höhere Sorte auf die niedrigere gebracht; befinden sich in den Gliedern eines Verhältnisses höhere und niedrigere Sorten, die höchsten sind aber in beiden Gliedern gleich hoch: so drückt man die niedrigern Sorten als Brüche der höchsten aus, z. B.

3 Pf. 16 Lt. : 8 Pf. 8 Lt. = 18 Gr. : x Gr.
$3\frac{1}{2}$ Pf. : $8\frac{1}{4}$ Pf. = 18 Gr. : x Gr.

Sind die höchsten Sorten in beiden Gliedern nicht gleich hoch: so bringt man die höhern auf die niedrigern, die noch niedrigern drückt man als Brüche der nun höchsten aus, z. B.

1 Rthlr. 2 Gr. 1 Sch. : 36 Gr. 3 Sch. = 4 Pf. : x Pf.
$74\frac{1}{5}$ Gr. : $36\frac{3}{5}$ Gr. = 4 Pf. : x Pf.

Jede Aufgabe läßt sich nun nach folgenden Regeln auflösen

1) Das gegebene Verhältniß wird aufgesucht, und so hingeschrieben, daß das Glied desselben, worauf das erste gegebene Glied des zweiten zu bestimmenden Verhältnisses sich bezieht, linker Hand zuerst zu stehen kommt.

2) Mit den höhern und niedrigern Sorten wenn sie in einem Verhältnisse vorkommen sollten, verfährt man nach dem vorigen §. Besteht das erste Glied des zu bestimmenden Verhältnisses auch aus mehrern Sorten, so drückt man die niedrigern als Brüche der höchsten aus.

3) Die Brüche werden weggeschafft nach §. 59.

4) Hat das erste und zweite oder das erste und dritte Glied der Proportion einen gemeinschaftlichen Divisor: so dividirt man die Glieder mit diesem, und setzt statt derselben die Quotienten hin. §. 58.

5) Das Product der mittlern Glieder durch das erste dividirt giebt das gesuchte Glied, oder, wie man auch sagt, das Facit; z. B. wieviel kosten 60 Pf. 16 Lt., wenn 4 Pf. 24 Lt. kosten 2 Rthlr. 36 Gr.? Das gegebene Verhältniß ist 4 Pf. 24 Lt. : 60 Pf. 16 Lt. Auf 4 Pf. 24 Lt. bezieht sich

2 Rthlr. 36 Gr., denn dieses ist der Preis von jenem: also muß die Aufgabe so aufgesetzt werden.

4 Pf. 24 Lt. : 60 Pf. 6 Lt. = 2 Rt. 36 Gr. : x nach 1

$4\frac{3}{4}$ Pf. : $60\frac{1}{2}$ Pf. = $2\frac{1}{2}$ Rthlr. : x nach 2.

38 : 242 = 5 : x nach 3.

19 : 121 = 5 : x nach 4.

$\frac{121 \times 5}{19} = \frac{605}{19} = 31\frac{16}{19}$ Rthlr. = x nach 5.

Einige Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn $18\frac{3}{4}$ Pf. mit 5 Rthlr. bezahlt werden, wieviel werden 169 Pf. kosten?

Antw. 45 Rthlr. 4 Gr. 4 Schw.

2) Wenn ein Stück Tuch von 42 Ellen mit 64 Rthlr. 54 Gr. bezahlt ist, wie theuer kommen $\frac{3}{4}$ Ellen? Antw. 1 Rthlr. 11 Gr. $1\frac{1}{4}$ Schw.

3) Wenn für 8 Pf. $\frac{5}{8}$ Rthlr. gefordert wird, wie viel Gr. wird man für 28 Lt. bezahlen müssen?

Antw. 4 Gr. $6\frac{39}{64}$ Schw.

4) Wie hoch kommen 24 Lt. zu stehen, wenn 6 Pf. mit $\frac{3}{4}$ Rthlr. bezahlt sind?

Antw. 6 Gr. $3\frac{3}{4}$ Schw.

5) Was muß für $125\frac{3}{4}$ Ellen gefordert werden, wenn $2\frac{3}{8}$ Ellen $4\frac{3}{4}$ Rthlr. kosten?

Antw. 251 Rthlr. 36 Gr.

Anmerkung. Manchmal wird in den Aufgaben das Verhältniß, welches gegeben werden sollte, ausgelassen, weil es als bekannt vorausgesetzt wird, oder beide Glieder werden nicht ausdrücklich genannt; z. B. wieviel Mark Bo. machen 60 Rthlr. Hier ist als bekannt vorausgesetzt, daß 1 Rthlr. = $2\frac{1}{4}$ Mark Bo. ist; also

1 Rthlr. : 60 Rthlr. = $2\frac{1}{4}$ Mark Bo. : x oder

4 : 60 = 9 : x u. x = $\frac{60 \cdot 9}{4}$ = 135 Mark Bco.

Ferner wieviel Zinsen bringen 25000 Rthlr., wenn der Zinsfuß 4 Procent ist. Hier muß man setzen

100 : 25000 = 4 : x.

1 : 250 = 4 : x, also x = 1000 Rt. Zinse.

§. 65.

Man kann auch jede Aufgabe von der Art sofort als eine Gleichung aufsetzen, ohne nöthig zu haben, sie erst als eine Proportion zu ordnen. Das, was man in einer Aufgabe am leichtesten auffindet, ist das Unbekannte, oder das, was man zu wissen verlangt. Man setze also x hin, und gegenüber das, worauf sich dieses x bezieht (das zweite Glied des ersten gegebenen Verhältnisses); z. B. an einem Tage legt ein Bothe 5 Meilen zurück, wieviel Zeit braucht er zu $48\frac{1}{2}$ Meilen? Wieviel Zeit oder Tage er braucht, ist x, dieses bezieht sich auf $48\frac{1}{2}$ Meilen, denn diese sollen in x Tagen zurückgelegt werden. Man setzt also

x Tage $\quad 48\frac{1}{2}$ Meilen.

Die übrigen Glieder werden so geordnet, daß die gleichnamigen nicht unter einander kommen; also

x Tage $\quad 48\frac{1}{2}$ Meilen

5 Meilen $\quad$ 1 Tag

$5x = 48\frac{1}{2}$ oder $10x = 97$, $x = \frac{97}{10}$ Tage.

Die übereinander stehenden Glieder sind als Factoren eines Products anzusehen, und man bedient sich hier des 3. und 4. Satzes aus §. 50 sowohl um die Brüche wegzuschaffen, als auch die Gleichung einfacher auszudrücken, z. B.

1) 5 Pf. kosten 25 Rthlr., wieviel kosten 230 Pf.?

x Rthlr. $\quad = \quad$ 230 Pf.

1. ~~5~~ Pf. $\quad\quad$ ~~25~~ Rthlr. 5

$x = 230 \times 5 = 1150$ Rthlr.

2) $1\frac{1}{2}$ Elle Band kostet $\frac{3}{4}$ Gr., wieviel kosten $23\frac{3}{4}$ E.?

$$\frac{x \text{ Gr.}}{1\frac{1}{2} \text{ Elle}} = \frac{23\frac{3}{4} \text{ Ellen}}{\frac{3}{4} \text{ Gr.}}$$

$$8x = 95, \; x = \tfrac{95}{8} = 11\tfrac{7}{8} \text{ Gr.}$$

Multiplicirt man erstlich $1\frac{1}{2}$ und $23\frac{3}{4}$ mit 4, so fallen die Brüche weg, und man hat 6 statt $1\frac{1}{2}$, und 95 statt $23\frac{3}{4}$. Multiplicirt man ferner 6 und $\frac{3}{4}$ mit 4, so hat man 24 statt 6, und 3 statt $\frac{3}{4}$. Dividirt man 24 und 3 mit 3, so hat man 8 statt 24, und 1 statt 3.

§. 66.

Die erste Regel §. 64, wornach das Glied des gegebenen Verhältnisses, welches sich auf das gegebene erste Glied des zweiten zu bestimmenden Verhältnisses bezieht, zuerst linker Hand gesetzt werden muß, leidet in manchen Fällen eine Ausnahme, und diese Ausnahme rührt von der Beschaffenheit der Dinge her, deren Größe durch Zahlen ausgedrückt wird. In zwey gleichen Verhältnissen muß das zweite Glied des zweiten Verhältnisses eben so aus dem ersten Gliede desselben Verhältnisses entstanden seyn, als das zweite Glied des ersten Verhältnisses aus dem ersten desselben Verhältnisses. Wenn also im ersten Verhältnisse das zweite Glied größer ist, als das erste, so muß im zweiten Verhältniß das zweite Glied auch größer seyn als das erste. Gesetzt nun, es sollte die Aufgabe aufgelöst werden: Wieviel Mühlen sind nöthig um einen Vorrath Getreide in 12 Stunden zu malen, wenn derselbe Vorrath von 6

Mühlen in 48 Stunden gemalen würde? Nach der gegebenen Regel würde man die Aufgabe so setzen müssen

48 Stunden : 12 Stunden = 6 Mühlen : x Mühle. Weil nun 12 < 48, so wird auch x < 6. Man ist aber begreiflich, daß man, um dieselbe Quantität Getreide zu malen, in einer längern Zeit weniger Mühlen, und in einer kürzern Zeit mehr Mühlen nöthig habe. Dies drückt man so aus: Mühlen und Zeiten stehen in einem umgekehrten Verhältniß. In diesem Fall also, wo Dinge in einem umgekehrten Verhältniß stehen, das heißt, wenn so wie das eine wächst, das andere abnimmt, muß das erste Verhältniß umgekehrt werden, oder das Glied des ersten Verhältnisses, worauf sich das erste Glied des zu bestimmenden Verhältnisses nicht bezieht, muß das erste linker Hand seyn. Im Beyspiel also

12 St. : 48 Se. = 6 M. : x M.

Dies wird, wiewohl mit Unrecht, die verkehrte Regeldetri genannt. Man beobachtet übrigens alles, was im erwähnten §. gesagt worden ist.

Als Gleichung müßte diese Aufgabe so stehen

$$\frac{x \text{ Mühlen}}{12 \text{ St.}} = \frac{48 \text{ St.}}{6 \text{ Mühlen.}}$$

$$12\,x = 48 \times 5,\ x = 24.$$

§. 67.

Die Umkehrung des ersten Verhältnisses hat nur auf das letzte Glied der Proportion Einfluß. Da dieses aber unbekannt ist, und durch die drey gegebenen Glieder nach der bekannten Regel bestimmt

stimmt wird: so leidet das Gesetz der Proportion §. 57 durch diese Umkehrung im geringsten nicht, und es bedarf keiner neuen Regel, um solche Aufgaben aufzulösen. Die Rechenkunst kann keine Regeln über die Fälle geben, in welchen dieses Verfahren seine Anwendung findet, sondern man muß dies aus den Begriffen der Dinge selbst beurtheilen. Wenn Dinge sich so gegen einander verhalten, daß sie ihrer Natur nach weder zugleich wachsen oder zugleich abnehmen können, sondern, wenn eins wächst, das andere in eben dem Verhältnisse abnimmt: so stehen diese Dinge in einem umgekehrten Verhältniß; z. B. Kräfte und Zeiten bey einerley Würkung; Geschwindigkeiten und Zeiten bey einerley Räumen; das Maaß eines Stoffes oder einer Materie zu irgend einer Absicht mit der Größe des Stoffes oder der Materie; wenn das zu vertheilende sich gleich bleibt, die Menge der Empfänger mit den Theilen, die jeder empfängt; Werth einer Materie und das Gewicht dessen, was bey einerley Preisen daraus kann gemacht werden; die Menge der Waaren mit den Meilen bey einerley Fracht; gegenseitig ohne Interressen geliehene Summen mit den Zeiten, worin man die Summen behalten kann, so daß eine Gefälligkeit durch die andere vergütet wird. Dies sind ungefähr die Fälle, welche im gemeinen Leben am häufigsten vorkommen, worauf man also zu achten hat. Einige Beyspiele.

1) Ein Schneider fordert von einem Zeuge $\frac{3}{4}$ Elle breit 16 Ellen; nun ist aber das Zeug 1 Elle breit, wieviel muß der Schneider haben?

Antw. 12 Ellen.

2) Wenn 12 Mann auf 15 Tage mit Brodt versorgt sind, wie lange werden 36 Mann damit reichen? Antw. 5 Tage.

3) Wenn 9 Schiffpf. 12 Meilen zu fahren verdungen sind, wie weit können 6 Schiffpf. für dieselbe Fracht gefahren werden? Antw. 18 Meilen.

Zwölftes Kapittel.

Von der Zerstreuungsmethode.

§. 68.

Wenn in einem oder in beiden mittlern Gliedern der Proportion mehrere Sorten vorkommen, so muß man der Regel §. 63. nach alles auf die kleinste Sorte bringen. Dies erschwert aber die Rechnung, indem dadurch die Glieder sehr groß werden. Man kann auch die niederen Sorten als Brüche von höhern ausdrücken §. 38. z. B. 3 Rthlr. 24 gr. 6 pfenn. könnte man auch so ausdrücken $(3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{48})$ Thaler. Die Wegschaffung dieser Brüche nach §. 59 würde aber ebensowohl die Glieder der Proportion vergrößern, und der Vortheil, den man durch diese Brüche erhielte, würde eben nicht sehr beträchtlich seyn.

§. 69.

Da sich indeß jede niedrigere Sorte als Bruch einer höhern ausdrücken läßt, z. B. 1 Zentner ist einerley mit 8 Lspf., also auch $\frac{1}{8}$ Zentner mit 1 Lspf., und $\frac{3}{8}$ Zentner mit 3 Lspf.: so könnte man auch so ver-

verfahren. Gesetzt man fragte: Wenn 2 Zentner 17 Rthlr. kosten, was kosten 6 Zentn. 7 Lspf.? also 2 Zentner : $6\frac{7}{8}$ Zentner $=$ 17 Rthlr. : x Rthlr. Man berechnete erst den Werth von x so, als wenn im ersten Gliede 1, im zweiten nur 6 stände. Also 1 Zent. : 6 Zent. $=$ 17 Rtlr. : x Rtlr. und $x = 102$. Ferner berechnete man dieses x, als wenn im ersten Gliede 1, im zweiten nur $\frac{7}{8}$ stände. Also 1 Zent. : $\frac{7}{8}$ Zent. $=$ 17 Rtlr. : x Rtlr.; u. $x = 14\frac{7}{8}$. Dieses zum vorigen addirt, oder $14\frac{7}{8} + 102 = 116\frac{7}{8}$. Nun stand aber im ersten Gliede nicht 1, wie angenommen wurd, sondern 2; folglich muß das, was herausgekommen ist, noch mit 2 dividirt werden, und der Werth von x ist nun $\frac{116\frac{7}{8}}{2} = 58\frac{7}{16}$. Daß dieses Verfahren richtig sey, wird einer leicht einsehen, wenn er nur überlegt, daß der Werth von x nach §. 57 $= \frac{17 \times (6 + \frac{7}{8})}{2}$ seyn müsse, also $= \frac{17 \times 6}{2} + \frac{17 \times \frac{7}{8}}{2}$.

§. 70.

Man kann sich dieses noch leichter machen, und den Bruch $\frac{7}{8}$ in solche Theile zerlegen, die zum Zähler 1 haben, so wäre schon das multipliciren mit dem Zähler erspart, z. B. $\frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Man multiplicirte also erst 6 mit 17; dann dividirte man 17 erst durch 2, dann durch 4, dann durch 8; addirte die Quotienten zum Product 6×17, und dividirte die Summe durch 2, und nun wäre x gefunden. Denn $\frac{17 \times (6 + \frac{7}{8})}{2} = \frac{17 \times (6 + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8})}{2} = \frac{17 \times (6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})}{2} = \frac{17 \times 6 + \frac{17}{2} + \frac{17}{4} + \frac{17}{8}}{2}$. Wenn man nun überlegt, daß $\frac{1}{4}$ die Hälfte von $\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{8}$ die Hälfte von $\frac{1}{4}$ ist, so braucht man nur 17 mit 6 zu multipliciren, dann

17 durch 2 zu dividiren, diesen Quotienten wieder durch 2, und diesen Quotienten wieder durch 2, und die Summe der Quotienten und des Products mit 2 dividirt giebt x. Denn $\frac{17 \times 6 + \frac{17}{2} + \frac{17}{2 \times 2} + \frac{17}{2 \times 2 \times 2}}{2}$ $= x = \frac{17 \times 6 + \frac{17}{2} + \frac{17}{4} + \frac{17}{8}}{2}$.

§. 71.

Es wird also bloß darauf ankommen, auf welche Weise man einen Bruch in solche Theile zerlegen könne. Einen Bruch in Theile zerlegen nennt man **zerstreuen**; und solche Brüche, die zerstreut werden können, **zerstreuliche Brüche**; die Brüche hingegen, welche zum Zähler entweder 1, oder eine solche Zahl haben, welche im Nenner aufgeht, heißen **unzerstreulich**. Sind 6 Rthlr. 32 Gr. gegeben, so ist 6 Rthlr. 32 Gr. $= 6\frac{32}{72}$ Rthlr., und $\frac{32}{72} = \frac{24}{72} + \frac{6}{72} + \frac{2}{72} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$. Man kann dies so schreiben

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\frac{32}{72}} \\ 24 & \frac{1}{3} \\ 6 & \frac{1}{12} \\ 2 & \frac{1}{36} \end{array}$$

Man schreibt nämlich die Theile, worin der Zähler zerstreut ist, linker Hand des Strichs nach ihrer Folge; rechter Hand die Quotienten aus den Theilen in des zu zerstreuenden Bruches Nenner. Nun ist 24 Gr. der dritte Theil, 6 Gr. der zwölfte Theil, und 2 Gr. der sechs und dreyzigste Theil von einem Thaler. Ferner, da 6 in 24 viermal enthalten ist: so muß auch der zwölfte Theil viermal im dritten Theile von einem Thaler enthalten seyn; und da 2 in 6 dreymal enthalten ist, so muß auch der

der sechs und dreyzigste Theil dreymal im zwölften Theile enthalten seyn. Wenn man also rechter Hand des Strichs die Quotienten der Theile statt der Brüche hinschreibt, so drücken diese Quotienten aus, wievielmal jeder Bruch in seinem vorhergehenden enthalten ist.

$$\begin{array}{c} \underbrace{\tfrac{32}{27}} \\ \begin{array}{r|l} 24 & 3 \\ 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

Das würde also so viel bedeuten: 24 Gr. ist ein Drittel von einem Thaler; 6 Gr. ist ein Viertel von einem Drittel oder $\frac{1}{3\times4}$ Rthlr., und 2 Gr. ist $\frac{1}{3\times4\times3}$ Rthlr.

§. 72.

Wenn die Theile so auf einander folgen, daß jeder in seinem nächstvorhergehenden aufgeht: so nennt man sie **auseinander genommene Theile**, wie hier 24, 6, 2, und so muß man auch, wenn es möglich ist, die Theile allezeit wählen. Zuweilen aber geht dies nicht an, sondern ein Theil ist nur ein Factor von dem Nenner des zu zerstreuenden Bruchs, oder geht nur in diesem auf: dann nennt man den Quotienten aus diesem Theil in den Nenner **aus den Ganzen genommen**. Man pflegt ihn durch + zu bezeichnen, z. B. wenn 1 Schpf. = 20 Lpfd.

$$\begin{array}{c} 2 \text{ Schpf. } \underbrace{18} \text{ Lpfd.} \\ \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 4 & 5+ \\ 4 & 1 \end{array} \end{array}$$

Hier ist 4 kein Factor von 10, aber 4 ist ein Factor vom ganzen Nenner 20, und der Quotient ist 5. Manchmal ist auch ein Theil ein Factor nicht von dem nächstvorhergehenden, sondern von einem entfernteren Theile; diese Theile nennt man **durch überspringen zerstreut.** Man kann dieses durch einen Bogen andeuten, z. B.

3 Schpf. 17 Lspfd.

10|2
5|2
2|5

Hier geht 2 nicht in 5, sondern in 10 auf.

§. 73.

Die Regeln für alle Zerstreuungen kann man nun kurz so fassen.

1) Man sucht bey Münzen, Maaßen und Gewichten, wievielmal jede niedrigere Einheit in der höhern enthalten ist, dann ist der Bruch gefunden, welcher zerstreut werden soll; z. B. 6 Pfd. 7 Lt. Nun ist 1 Pfd. = 32 Lt., und $\frac{1}{32}$ Pfd. = 1 Lt., also der Bruch $\frac{7}{32}$. So auch wenn 2 Rthlr. 23 mgr. gegeben, so ist 1 Rthlr. = 36 mgr.; $\frac{1}{36}$ Rthlr. = 1 mgr., also der Bruch $\frac{23}{36}$.

2) Dieses Bruches Zähler zerlegt man nun auf die Weise, daß der erste Theil die möglichstgrößte Zahl ist, welche in dem Nenner des zu zerstreuenden Bruchs aufgeht. Dieser Theil wird linker Hand des Strichs geschrieben, der Quotient aus ihm und dem Nenner rechter Hand.

6 Pfd. 7 Lt. und 2 Rthlr. 23 mgr.

4|8 16|2

3)

3) Nun werden die übrigen Theile so genommen, daß, wenn es möglich ist, jeder in dem nächstvorhergehenden aufgeht, oder daß gleiche Theile kommen, wie 4, 4, 4; oder 2, 2, 2; oder 1, 1, 1, u. s. w. Je kleiner der letzte Theil ist, desto besser ist es, nur muß er eine ganze Zahl seyn, wenn niedrigere Sorten folgen.

6 Pfd. 7 Lt. und 2 Rthlr. 23 mgr.

4	8
2	
1	

16	2
4	
2	
1	

4) Jeder Theil, der erste ausgenommen, in den nächstvorhergehenden dividirt giebt einen Quotienten, den man ihm zur Seite rechter Hand des Strichs schreibt.

6 Pfd. 7 Lt. und 2 Rthlr. 23 mgr.

4	8
2	2
1	2

16	2
4	4
2	2
1	2

5) Geht ein Theil nicht in dem nächstvorhergehenden auf, so geht er entweder in dem Nenner des zu zerstreuenden Bruchs, oder in irgend einem vorhergehenden Theile auf; das erste drückt man durch +, das andere durch einen Bogen aus, z. B.

a) 3 Spf. 17 Lpf. b) 0 Spf. 19 Lpf. c) 0 Spf. 19 Lpf.

a)

10	2
5	2
2	5

b)

10	2
5	2
4	5 +

c)

10	2
5	2
2	5
2	1

In

In a und c geht 2 nicht in 5, sondern in 10 auf; und in b geht 4 nur in den Nenner des zu zerstreuenden Bruches $\frac{19}{25}$ auf.

6) Sind mehrere Sorten zu zerstreuen, so beobachtet man bey jeder einzelnen dasselbe, nur muß man noch merken, daß jede oberste Zahl rechter Hand in den Kolumnen, mit dem untersten Theile linker Hand in der vorhergehenden Kolumne muß multiplicirt werden, z. B.

4 Schpfd. 14 Lpfd. 12 Pfd. 14 Lth. 3 Quent.

10 | 2	7 | 4	8 | 4	2 | 4
2 | 5	2 | 7 +	4 | 2	1 | 2
2 | 1	2 | 1	2 | 2	
	1 | 2		

Denn wenn 7 Pfund der zweite Theil von 1 Lpfd. ist, so muß begreiflich 7 Pfd. der 4te Theil von 2 Lpfd. seyn; und wenn 2 Quentin der 2te Theil von 1 Loth ist, so muß 2 Quentin der 4te Theil von 2 Loth seyn. Hierin liegt auch der Grund von dem, was in der dritten Regel zuletzt ist gesagt worden.

Anmerkung. Wenn keine Einheiten von der höhern Sorte, worin man die niedrigen zerstreut hat, da sind, so kann man statt ihrer der Deutlichkeit wegen 0 setzen, wie dieses in 5 bey b und c geschehen ist, wo Lpfde in Schpfde zerstreut sind. Uebrigens ist hier und in dem Folgenden dieses Kapittels der Bequemlichkeit wegen Hamburger Gewicht genommen worden.

§. 74.

Anwendung des vorhergehenden auf den Fall, wenn im zweiten Gliede des ersten Verhältnisses mehrere Sorten sich finden. Die Aufgabe sey:

Wenn

Wenn 5 Zentner 26 Rthlr. kosten, wie hoch kommen 36 Zent. 5 Lpfd. 4 Pfd.? Man schreibe die Aufgabe hin, wie es sich nach §. 64. 1 gehört, und zerstreue die Sorten nach §. 73.

5 Zent.: 36 Zent. 5 Lpf. 4 Pfd. = 26 Rtlr. : x Rtlr.

$$\begin{array}{r|l@{\qquad}r|l} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Man denke sich, daß im ersten Gliede der Proportion 1 stände, so könnte man nach und nach folgende Fragen beantworten.

1) für 36 Zentner.

1 Zent. : 36 Zent. = 26 Rthlr. : m; also $m = 36 . 26$.

2) für 4 Lpfd. oder $\frac{1}{2}$ Zent.

1 Zent. : $\frac{1}{2}$ Zent. = 26 Rthlr. : n; also $n = \frac{26}{2}$.

3) für 1 Lpfd. oder den 4ten Theil vom halben Zentner.

1 Zent. : $\frac{1}{2 \times 4}$ Zent. = 26 Rthlr. : p; also $p = \frac{26}{2 \times 4}$.

4) für 2 Pfd. oder den 7ten Theil von $\frac{1}{2 \cdot 4}$ Zent.

1 Zent. : $\frac{1}{2 \times 4 \times 7}$ Zent. = 26 Rtl. : q; also $q = \frac{26}{2 \cdot 4 \times 7}$

5) für 2 Pfd. nochmal $s = \frac{26}{2 \times 4 \times 7}$

Nun muß $\frac{m + n + p + q + s}{5} = x$ seyn oder

$$\frac{36 . 26 + \frac{26}{2} + \frac{26}{2 \times 4} + \frac{26}{2 \times 4 \times 7} + \frac{26}{2 \times 4 \times 7}}{5} = x.$$

Betrachtet man aber die Werthe von n, p, q, 5, so ist klar, daß man jeden durch die Division aus den nächstvorhergehenden finden kann; denn $n = \frac{26}{2}$; $p = \frac{26}{2 \times 4} = \frac{n}{4}$; $q = \frac{26}{2 \times 4 \times 7} = \frac{p}{7}$; und $q = s$.

Hieraus läßt sich eine allgemeine Regel für alle Fälle dieser Art finden; das dritte Glied der Proportion, oder das erste Glied des zweiten Verhältnisses sey allgemein = a.

Man

Man multiplicirt die Zahl der höchsten Sorte im zweiten Gliede (welche auch o seyn kann, wo dann das Product auch o wird) mit a; dann wird a mit der obersten Zahl rechter Hand in der ersten Kolumne dividirt; der Quotient sey n; darauf wird n mit der folgenden Zahl rechter Hand in der ersten Kolumne dividirt, der Quotient sey p; p wird wieder mit der folgenden Zahl dividirt, der Quotient sey q; und so macht man es mit allen Zahlen rechter Hand in den Kolumnen, jede dividirt nach ihrer Reihe den nächstvorhergehenden Quotienten. Die Summe des Products und der Quotienten durch das erste Glied dividirt giebt x oder das Facit.

Anmerkung. Diese Regel gilt aber nur allgemein in dem Fall, wenn jeder Theil, worin der Bruch zerstreut ist, in dem nächstvorhergehenden aufgeht. Man muß also noch folgendes merken.

1) Geht einer von den Theilen, worin der Bruch zerstreut ist, nicht in dem nächstvorhergehenden, sondern in einem entfernteren Theile auf: so muß man mit der ihm rechts stehenden Zahl nicht den nächstvorhergehenden Quotienten, sondern den Quotienten dividiren, welcher zu dem entfernteren Theile gehört.

2) Geht einer von den Theilen, worin der Bruch zerstreut ist, nur in dem Nenner des zu zerstreuenden Bruchs auf; so muß man mit der ihm rechts stehenden Zahl nicht den nächstvorhergehenden Quotienten, sondern a dividiren.

Verfährt man nun nach der gegebenen Regel, so wird die Rechnung so aussehen.

5 Zent. : 36 Zent. 5 Lpf. 4 Pf. = 26 Rtlr. : x Rtlr.

4 | 2   2 | 7
1 | 4   2 | 1

$$\begin{array}{r}36\\ a = 26\\ \hline 216\\ 72\\ \hline 936\end{array}$$

	936		$= m$
Betrag für 4 Lpf.	13		$= \frac{26}{2} = n$
— — 1 —	3	24 Gr.	$= \frac{26}{2 \times 4} = \frac{n}{4} = p$
— — 2 Pfd.		34 — $1\frac{3}{7}$ S.	$= \frac{26}{2 \times 4 \times 7} = \frac{p}{7} = q$
— — 2 —		84 — $1\frac{3}{7}$ —	$= \frac{26}{2 \times 4 \times 7} = \frac{p}{7} = q$

$$\frac{953\ \text{Rt. } 20\ \text{Gr. } 2\tfrac{6}{7}\ \text{Sch.}}{5} : \quad 190\ \text{Rt. } 47\ \text{Gr. } 1\tfrac{4}{7}\ \text{Sch.}$$

Anmerkung. Auf diese Art der Auflösung führt auch die allgemeine Regel §. 64. 5. Denn man drücke die niedrigeren Sorten in Brüchen von der höchsten aus; so ist 5 Zent. : $(36 + \frac{5}{8} + \frac{4}{8 \times 14})$ Zent. = 26 Rt. : x Rt.; also

$$x = \frac{(36 + \frac{5}{8} + \frac{4}{8 \times 14})\,26}{5} \text{ oder}$$

$$x = \frac{(36 + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8 \times 14})\,26}{5} \text{ oder}$$

$$x = \frac{(36 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 4 \times 7} + \frac{1}{2 \times 4 \times 7})\,26}{5} \text{ oder}$$

$$x = \frac{36.26 + \frac{26}{2} + \frac{26}{2 \times 4} + \frac{26}{2 \times 4 \times 7} + \frac{26}{2 \times 4 \times 7}}{5}.$$

Der letzte Ausdruck enthält die Auflösung der Aufgabe vollständig.

Noch eine Aufgabe. Wenn 3 Schpf. 85 Rtlr. kosten, wie hoch kommen 40 Schpf. 12 Lpf.?

3 Schpf. : 40 Lpf. 12 Lpf. = 85 Rthlr. : x Rthlr.

$$12 = \begin{array}{c|c}10 & 2\\ 2 & 5\end{array}$$

$$\begin{array}{r}85 = a\\ 40\\ \hline 3400\end{array}$$

Betrag für 10 Lpf.	= 42 — 36 Gr.
— — 2 —	= 6 — 36 —

$$\frac{3451\ \text{Rthlr.}}{3} : \quad 1150\ \text{Rthlr. } 24\ \text{Gr.}$$

§. 74.

Anwendung des vorhergehenden auf den Fall, wenn im dritten Gliede der Proportion oder im ersten Gliede des zweiten Verhältnisses mehrere Sorten sich befinden. Die Aufgabe sey: Was kosten 3426 Stück, wenn 1 Schock 41 Gr. 3 Sch. kostet? Nun ist 1 Schock = 60 Stück. Man schreibe die Aufgabe gehörig hin, und zerstreue die Sorten des dritten Gliedes in Theilen von Thalern.

$$6:\ \frac{60\,\text{St.} : 3426\,\text{St.}}{10\,\text{St.} : 571\,\text{St.}} = 0\,\text{Rt.}\ 41\,\text{Gr.}\ 3\,\text{Sch.} : x\,\text{Rt.}$$

$$\begin{array}{r|lr|l} 24 & 3 & 1 & 5 \\ 12 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & & \end{array}$$

Das zweite Glied des ersten Verhältnisses sey allgemein b, und es gilt eben das hier von b und dem dritten Gliede der Proportion, was im vorigen Fall von a und dem zweiten Gliede der Proportion galt; folglich bedarf es hier keiner neuen Regel, und die dortige Anmerkung gilt nicht allein für jenen, sondern auch für diesen und für jeden Fall.

Also ist hier m gleich dem Producte aus b in die Zahl der höchsten Sorte im dritten Gliede; nun ist diese im gegenwärtigen Beyspiel 0, also auch $0.b = m = 0$. Es giebt daher nur Quotienten zusammen zu addiren. Der erste von diesen ist $\frac{b}{3} = \frac{571}{3} = n$; der zweite $\frac{n}{2} = \frac{571}{3 \times 2} = p$; der dritte $\frac{p}{3} = \frac{571}{3 \times 2 \times 3} = q$; der vierte $\frac{q}{3} = \frac{571}{3 \times 2 \times 3 \times 4} = r$; der fünfte $\frac{r}{5} = \frac{571}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = s$; der sechste $\frac{s}{1}$ oder der vorige, und so ist auch der siebente der vorige. Die Rechnung wird also so aussehen müssen

60

$$6:\ \frac{60\,\text{St.} : 3426\,\text{St.}}{10\,\text{St.} : 571\,\text{St.}} = 0\,\text{Rtl.}\ \underbrace{41}\,\text{Gr.}\ \underbrace{3}\,\text{Sch.} : x\,\text{Rtl.}$$

$$\begin{array}{r|l r|l} 24 & 3 & 1 & 5 \\ 12 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & & \end{array}$$

190 Rthlr.		24 Gr.			
95	—	12	—		
31	—	52	—		
7	—	67	—		
1	—	42	—	1	Schw.
1	—	42	—	1	—
1	—	42	—	1	—

$$10:\ \frac{329\ \text{Rthlr.}\ 65\ \text{Gr.}\ \ 3\ \text{Schw.}}{32\ \text{Rthlr.}\ 71\ \text{Gr.}\ 1\tfrac{4}{5}\ \text{Schw.} = x.}$$

Anmerkung. Auch dieses läßt sich aus der allgemeinen Regel §. 64. 5 herleiten

$$10\,\text{St.} : 571\,\text{St.} = \left(\tfrac{41}{72} + \tfrac{3}{72 \times 5}\right)\text{Rt.} : \text{Rt.},\ \text{also}$$

$$x = \frac{\left(\frac{41}{72} + \frac{3}{72 \times 5}\right) \times 571}{10}\ \text{oder}$$

$$x = \frac{\left(\frac{42}{72} + \frac{12}{72} + \frac{4}{72} + \frac{1}{72} + \frac{1}{72 \times 5} + \frac{1}{72 \times 5} + \frac{1}{72 \times 5}\right) 571}{10}$$

oder

$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times} + \frac{1}{3 \times 2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}\right) \times \frac{571}{10}.$$

$$x = \frac{571}{3} + \frac{571}{3 \times 2} + \frac{571}{3 \times 2 \times 3} + \frac{571}{3 \times 2\ \ 3 \times 4} + \frac{571}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{571}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{571}{3 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}) \times \frac{1}{10}.$$

Der letzte Ausdruck enthält die Auflösung, welcher man sich hier zu bedienen hat, um jeden Quotienten, den ersten ausgenommen, aus dem nächstvorhergehenden zu finden.

Ein anderes Beyspiel. 30 Pfd. kosten 2 Rthlr. 60 Gr. $1\frac{1}{4}$ Sch.; wie hoch kommen 2839 Pfd.?

30 Pf. : 2839 Pf. = 2 Rt. 60 Gr. 1¼ Sch. : x Rt.

36	2	1	5
12	3	¼	4
6	2		
3	2		
2	3		
1	2		

2839
2

5678
1419 — 36 Gr.
473 — 12 —
236 — 42 —
118 — 21 —
78 — 62 —
39 — 31 —
7 — 63 — 4 Schw.
1 — 69 — 4¾ —

8053 Rt. 49 Gr. 3¾ Schw.
30: 268 Rt. 56 Gr. $4\frac{35}{120}$ Schw.

§. 76.

Anwendung des vorhergehenden auf den Fall, wenn in beiden mittlern Gliedern mehrere Sorten vorkommen. Die Aufgabe sey: 5 Zentn. kosten 96 Rthlr. 58 Gr. 3 Schw.; wie hoch kommen 542 Zent. 6 Lpfd. 8 Pfd.? Setzt man diese Aufgabe gehörig auf, und zerstreut die niedrigern Sorten, so ist sie

5 Ztn. : 542 Ztn. 6 Lf. 8 Pf. = 96 Rt. 58 G. 3 S. : x Rt.

4	2	7	2
1	4	1	7
1	1		

36	2	1	5
18	2	1	1
3	6	1	1
1	3		

Beym ersten Anblick scheint diese Aufgabe ungleich verwickelter zu seyn, als die vorigen; indeß ist

ist doch ihre Auflösung nicht schwer. Wir wollen annehmen, daß im ersten Gliede 1 stände, und diese Aufgabe in drey andere auflösen.

1) 1 Zent. : 236 Zent. = 96 Rt. 58 Gr. 3 Sch : u.
2) 1 Zent. : $\frac{6}{8}$ Zent. = 96 Rt. 58 Gr. 3 Sch. : y.
3) 1 Zent. : $\frac{8}{8 \times 14}$ Zent. = 96 Rt. 58 Gr. 3 Sch. : z.

Denn jede Aufgabe von dieser Art läßt sich in so viel Proportionen auflösen, als Sorten im zweiten Gliede des ersten Verhältnisses sich befinden. Die niedrigern Sorten drückt man in Brüchen der höchsten aus. Das u in der ersten Proportion findet man nach dem vorigen §. In Rücksicht der beiden andern Proportionen darf man nur die Brüche $\frac{6}{8}$ und $\frac{8}{8 \times 14}$ in Theile zerfällen; denn es ist $\frac{6}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 4}$, und $\frac{8}{8 \times 14} = \frac{7}{8 \times 14} + \frac{1}{8 \times 14} = \frac{1}{8 \times 2} + \frac{1}{8 \times 2 \times 7} = \frac{1}{2 \times 4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 4 \times 2 \times 7}$; folglich hat man

$$y = \frac{96\text{ Rt. } 58\text{ Gr. } 3\text{ Sch.}}{2} + \frac{96\text{ Rt. } 58\text{ Gr. } 3\text{ Sch.}}{2 \times 4} + \frac{96\text{ Rt. } 58\text{ Gr. } 3\text{ Sch.}}{2 \times 4}$$

$$z = \frac{96\text{ Rthlr. } 58\text{ Gr. } 3\text{ Schw.}}{2 \times 4 \times 2} + \frac{96\text{ Rthlr. } 58\text{ Gr. } 3\text{ Schw.}}{2 \times 4 \times 2 \times 7}$$

Hier findet man auch jeden Quotienten, den ersten ausgenommen, aus den nächstvorhergehenden. Endlich wird dann $\frac{u + y + z}{5} = x$ seyn.

Nun werden folgende Regeln für diesen Fall verständlich seyn.

1) Die Zahlen der höchsten Sorte in den beiden mittlern Gliedern, in welche die niedrigern Sorten zerstreut sind, werden mit einander multiplicirt. Ist die höchste Sorte im dritten Gliede 0, so ist das Product auch 0, und die Multiplication fällt weg. Dann wird die höchste Sorte des zweiten Gliedes mit der obersten Zahl rechter Hand in der ersten Kolumne des dritten Gliedes dividirt;

dividirt; dieser Quotient mit der folgenden; dieser Quotient wieder mit der folgenden, und so fort, wobey man die Anmerkung zu §. 74 nicht vergessen muß.

2) Dann wird das ganze dritte Glied mit der obersten Zahl rechter Hand in der ersten Kolumne des zweiten Gliedes dividirt, der Quotient mit der folgenden, dieser Quotient wieder mit der folgenden, und so fort.

3) Die Summe des Products und aller Quotienten durch das erste Glied dividirt giebt x oder das Facit.

Das Beyspiel wird nun so berechnet

5 Zt. : 542 Zt. 6 Lpf. 8 Pf. = 96 Rt. 58 G. 8 S. : x Rt.

4 | 2 7 | 2 36 | 2 1 | 5
1 | 4 1 | 7 18 | 2 1 | 1
1 | 1 3 | 6 1 | 1
1 | 3

542
96
52032
271
135 — 36 Gr.
22 — 42 —
7 — 38 —
1 — 36 — 2 Schw.
1 — 36 — 2 —
1 — 36 — 2 —
48 — 29 — $1\frac{1}{2}$ —
12 — 7 — $1\frac{5}{8}$ —
12 — 7 — $1\frac{5}{8}$ —
6 — 3 — $3\frac{5}{16}$ —
62 — $1\frac{21}{112}$

52552 Rt. 47 Gr. $0\frac{28}{112}$ Schw.

10510 Et. 38 Gr. $1\frac{1}{20}$ Schw.

Eine

Eine andere Aufgabe. Wenn jemand in 10 Jahren 9040 Rthlr. 16 gGr. 8 Pf. gebraucht, wieviel würde er in 36 Jahren 7 Monaten 3 Wochen brauchen.

10 J.:36 J. 7 M. 3 W. = 9040 Rt. 16 gGr. 8 Pf.: x Rt.

6	2	2	2		8	3	6	4
1	6	1	2		4	2	2	8
					2	2		
					2	1		

9040
36
54240
27120
325440
12
6
3
3

—	18 gGr.		
—	6 —		
4520	8 —	4 Pf.	
753	9 —	$4\frac{4}{6}$	—
376	16 —	$8\frac{4}{12}$	—
188	8 —	$4\frac{4}{24}$	—
331303 Rt.	18 gGr.	$9\frac{2}{12}$ Pf.	
10: 33130 Rt.	9 gGr.	$\frac{11}{12}$ Pf. = x.	

Manchmal ist es auch bequemer, die niedrigen Sorten im dritten Gliede nicht zu zerstreuen, wenn die Einheiten der höchsten Sorte im zweiten Gliede eine Zahl von einer Ziefer oder eine solche ausmachen, die sich bequem in Factoren zerfällen läßt, z. B.

112 Pf. : 26 Pf. 24 Lt. 2 Q. = 33 Rt. 42 Gr. 2 S. : x Rt.

5	8 | 4	2 | 4		5
5+1	8 | 1			167 Rt. 68 Gr. —
	4 | 2			5
	2 | 2			839 Rt. 52 Gr. —
	2 | 1			33 — 42 — 2 Schw.

Hier ist 26 in 5. (5+1) zerfällt, nach §. 21 Anmerk. 3.

8 — 28 — 3 —
8 — 28 — 3 —
4 — 14 — $1\frac{1}{2}$ —
2 — 7 — $\frac{3}{4}$ —
2 — 7 — $\frac{3}{4}$ —
37 — $3\frac{15}{16}$ —

899 Rt. 1 Gr. $4\frac{15}{16}$ Schw.

112 : 8 Rt. 1 Gr. $4\frac{1311}{1792}$ Sch.

Anmerkung. Ist im zweiten Gliede die höchste Sorte, worin die niedrigern zerstreut sind, Null (Anmerkung zu §. 73): so würde die Zerstreuung der niedrigern Sorten des dritten Gliedes durchaus zwecklos seyn, indem die Regel 1 ganz wegfällt, denn dort wäre das Product 0, und die Quotienten auch 0.

Zweites Beyspiel.

3 Schpf. : 41 Schpf. 8 Lpf. 7 Pf. = 42 Rt. 57 G. 2 S. : x

7	4 | 5	7 | 4	7
6—1	2 | 2		299 Rt. 31 G. 4 S.
	2 | 1		6

Hier ist 41 in 7. (6—1) nach §. 21. Anmerkung 3 zerfällt.

1797 Rt. 34 G. 4 S.
42 — 57 — 2 S.

1754 Rt. 49 G. 2 S.
8 — 40 — $1\frac{2}{5}$ —
4 — 20 — $\frac{7}{10}$ —
4 — 20 — $\frac{7}{10}$ —
1 — 5 — $\frac{7}{40}$ —

1772 R. 62 G. $4\frac{33}{40}$ S.

3 : 590 R. 68 G. $4\frac{357}{360}$ G. = x.

Anmerkung. Zur Probe berechnete ich dieses Beyspiel so, daß ich alles auf die niedrigste Sorte brachte und erhielt dasselbe, nur der Bruch war $\frac{833}{840}$. Wenn man aber Zähler und Nenner dieses Bruchs erst mit 3 multiplicirt und dann mit 7 dividirt, so kommt $\frac{357}{360}$.

Je größer die Zähler der zu zerstreuenden Brüche sind, desto größer wird die Zahl der zerstreuten Theile, und desto mehr Quotienten sind zu suchen. Bey der Aufgabe nämlich: Wenn 1 Zent. 58 Rthlr. kostet, wie hoch kommen 7 Lpfd. 13 Pfd. 24 Lt. zu stehen? wenn man sie gehörig aufsetzt, und die Sorten des zweiten Gliedes im ersten Verhältniß in Theilen von Zentnern zerstreut, als

$$1\,\text{Zent.} : 0\,\text{Zent.}\ \underbrace{7}\,\text{Lpf.}\ \underbrace{13}\,\text{Pf.}\ \underbrace{24}\,\text{Lt.} = 58\,\text{Rtlr.} : x.$$

$$\begin{array}{r|l@{\qquad}r|l@{\qquad}r|l}
4 & 2 & 7 & 2 & 16 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 7+ & 8 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 1 & & \\
 & & 2 & 1 & &
\end{array}$$

würde man neun Quotienten zu suchen haben. Wenn man nun überlegt, daß 13 Pfd. 24 Lt. beynahe 1 Lpf. ist, so kann man leicht auf die Gedanken kommen, 8 Lpfd. statt 7 Lpfd., und statt 13 Pfd. 24 Lt. das hinzuschreiben, was noch an den Pfunden und Lothen fehlt, um 1 Lpfd. auszumachen. Nun ist aber 1 Lpfd. = 13 Pfd. 32 Lt., und 13 Pfd. 32 Lt. — 13 Pfd. 24 Lt. = 8 Lt.; also 7 Lpfd. 13 Pfd. 24 Lt. = 8 Lpfd. — 8 Lt. Man könnte daher die Aufgabe auch so schreiben

8 Lpfd. : 8 Lpfd. — 8 Lt. = 58 Rthlr. : x.

Nun ist 1 Pfd. = 32 Lt.; 1 Lpfd. = 14 Pfd., also 1 Lpfd. = 32 × 14 Lt. = 448 Lt., und 8 Lt. als ein Bruch von einem Lpfd. ausgedrückt = $\frac{8}{448}$; und $\frac{448}{8} = 56$; also

8 Lpfd. : 8 Lpfd. — 8 Lt. = 58 Rt. : x.

8|56

Um sich das dividiren mit 56 zu erleichtern, zerfälle man die Zahl nach §. 25 Anmerkung 4 in ihre Factoren, also in 7×8; dividire erst mit 7, und diesen Quotienten mit 8, und ziehe diesen Quotienten von 8×58 ab.

8 Lpf. : 8 Lpf. — 8 Lt. = 58 Rt. : x.

−8 | 56
58 | ~~7~~
8 | 8

464
(8 Rthlr. 20 Gr. $2\frac{6}{7}$ Schw.)
1 — 2 — $2\frac{17}{28}$ —

462 Rthlr. 69 Gr. $2\frac{11}{28}$ Schw.
8: 57 Rthlr. 62 Gr. $3\frac{95}{224}$ Schw.

Den ersten Divisor, wie hier 7, pflegt man zu durchstreichen, und den ersten Quotienten in Klammern einzuschließen, um anzuzeigen, daß er zu den folgenden Quotienten nicht darf zugezählt werden.

Daß dieses Verfahren, welches man gewöhnlich **durch minus zerstreuen** nennt, in dem Fall, wenn kleinern Sorten zusammengenommen etwas weniges an der Einheit einer höhern Sorte fehlt, bequemer sey, als das vorhergehende, leuchtet von selbst ein; auch bedarf es weiter keiner Erinnerung, da der ganze Unterschied von dem vorigen nur darin besteht, daß die Summe der Quotienten aus den Divisoren der Kolumne, vor welcher (—) steht, vom Producte m (§. 74) abgezogen werden muß.

An=

Anmerkung 1. Wenn im ersten Gliede des ersten Verhältnisses mehrere Sorten vorkommen, so wird in diesem alles auf die niedrigste Sorte gebracht, und die höchste Sorte im zweiten Gliede desselben Verhältnisses darf nicht höher als jene seyn, z. B.

3 Pf. 4 Lt. : 1 Zent. 6 Pf. 3 Qu. = 24 Gr. : x ist

wenn 1 Zent. = 112 Pfd. ist

100 Lt. : 3776 Lt. 3 Qu. = 24 Gr. : x.

Anmerkung 2. Wenn im ersten Gliede des ersten Verhältnisses nur eine Sorte, und zwar die nächsthöhere von der höchsten des zweiten Gliedes sich befindet; so zerstreue man die Sorten dieses zweiten Gliedes in Theile jener nächsthöhern, und zerstreue das dritte Glied der Proportion nicht, z. B.

6 Zent. : 0 Zent. 24 Pfd. 8 Lt. = 26 Rt. 63 Gr. 4 Sch. : x.

14 | 8   8 | 4
7 | 2
2 | 7
1 | 2

Anmerkung 3. Es kommt hier alles darauf an, daß die gegebenen Sorten sich bequem in Theile zerlegen lassen, daß man diese leicht findet, und daß man hinlänglich geübt ist, benannte Zahlen mit einer gegebenen unbenannten zu dividiren §. 44. Manche Aufgaben lassen sich in der That auf die gewöhnliche Art §. 64, wo nicht leichter, doch gewiß eben so leicht auflösen.

Dreyzehntes Kapittel.

Von der Gesellschaftsregel.

§. 77.

Die Gesellschaftsregel ist nichts anders als die einfache Proportion, angewandt, um den Gewinn oder den Verlust eines jeden Mitgliedes einer Gesellschaft zu berechnen, welche, um irgend einen Vortheil zu erhalten, eine Summe aufgewandt hat, wozu ein jedes Mitglied einen Theil hergegeben. So viel ist leicht einzusehen, daß ein jeder nach Maaßgabe seines Antheils an der zusammengeschossenen Summe auch Theil am Gewinn oder Verlust haben muß, jenachdem die Unternehmung glücklich oder unglücklich ausgefallen ist. In allen hiehergehörenden Aufgaben muß ein Hauptverhältniß seyn, dessen Glieder gewöhnlich die zusammengeschossene Summe und der ganze Gewinn oder der ganze Verlust sind. Nach diesem Hauptverhältniß werden alle übrigen Verhältnisse bestimmt, deren erste Glieder gegeben sind, und deren zweite Glieder gesucht werden.

§. 78.

Es ist klar, daß sich die ganze Summe zum ganzen Gewinn oder zum ganzen Verlust verhält, wie sich der Beytrag eines jeden Mitgliedes zu seinem Antheil am Gewinn oder Verlust, oder umgekehrt, daß sich der ganze Gewinn oder der ganze Verlust zur ganzen Summe verhält, wie der Antheil eines jeden aus der Gesellschaft an dem Gewinn oder Verluste zu seinem Beytrage.

Gesetzt, fünf Kaufleute hätten, um ein Schiff auszurüsten, 50000 Rthlr. zusammengeschossen, A hätte 10000, B 25000, C 5000, D 8400, und E 1600 dazu hergegeben; der reine Gewinn wäre 75500 Rthlr., wie groß würde der Antheil eines jeden an diesem Gewinne seyn? Das Hauptverhältniß ist 50000 : 75500, oder einfacher

100 : 151. Die ersten gegebenen Glieder der zweiten Verhältnisse sind 10000, 25000, 5000, 8400, 1600. Nun ist, wenn man die ersten Glieder in dem gegebenen Hauptverhältnisse und in dem zu bestimmenden nach §. 59 einfacher ausdrückt.

$$1 : 151 = \begin{cases} 100 : m \text{ für A.} \\ 250 : n \text{ für B.} \\ 50 : p \text{ für C.} \\ 84 : q \text{ für D.} \\ 16 : r \text{ für E.} \end{cases}$$

Hiernach erhält A also $151 \times 100 = 15100$
B $151 \times 250 = 37750$
C $151 \times 50 = 7550$
D $151 \times 84 = 12684$
E $151 \times 16 = 2416$

75500 = dem ganzen Gewinn.

Ein anderes Beyspiel. A und B haben mit ihrem angelegten Gelde $13\frac{1}{2}$ pC. verdient, A empfängt $202\frac{1}{2}$ Rthlr., B $382\frac{1}{2}$ Rthlr., wieviel hat jeder ausgelegt? Hier ist das Hauptverhältniß $13\frac{1}{2} : 100$, also

für A, $13\frac{1}{2} : 100 = 202\frac{1}{2} : x, x = \frac{100 \times 405}{27} = 1500$ R.
— B, $13\frac{1}{2} : 100 = 382\frac{1}{2} : y, y = \frac{100 \times 765}{27} = 2800\frac{1}{3}$ —

So auch, wenn A 1200 Rthlr. angelegt, und damit 250 Rthlr. gewonnen hat, und B 225 Rthlr., C $242\frac{1}{2}$ Rthlr., D $231\frac{1}{4}$ Rthlr. gewonnen haben, wieviel haben B, C, D angelegt? Da nun das Angelegte mit dem Gewinne im Verhältnisse steht, und dieses Verhältniß bey A gegeben ist: so läßt sich das, was ein jeder der übrigen angelegt hat, leicht aus dem, was er gewonnen hat,

hat, bestimmen. Das Hauptverhältniß ist 250 : 1200 oder einfacher 5 : 24; also

für B, $5 : 24 = 225 : x$; $x = \frac{24 \times 225}{5} = 1080$ Rthlr.

— C, $5 : 24 = 242\frac{1}{2} : y$; $y = \frac{24 \times 485}{10} = 1164$ —

— D, $5 : 24 = 231\frac{1}{4} : z$; $z = \frac{24 . 925}{24} = 1110$ —

Anmerkung. In den gewöhnlichen Rechenbüchern kommen eine Menge Aufgaben hier vor, welche freylich wohl eine Gesellschaft betreffen, demungeachtet aber nicht zur Gesellschaftsregel gehören, wenn man diese in dem Sinne nimmt, wie sie § 77 ist genommen worden. Uebrigens werden die gebrauchten Beyspiele zur Erläuterung der Regel hinlänglich seyn.

Vierzehntes Kapittel.

Anwendung der zusammengesetzten Verhältnisse. Von der Regula Multiplex.

§. 80.

So wie in der Gesellschaftsregel nach einem gegebenen Verhältnisse mehrere Verhältnisse, deren erste Glieder gegeben sind, bestimmt worden: so wird hier umgekehrt ein Verhältniß, dessen erstes Glied gegeben ist, nach mehreren gegebenen Verhältnissen, oder nach einem Verhältniß, welches aus jenen zusammengesetzt ist, bestimmt. Z. B. Ein Fuhrmann bekommt 10 Rthlr. Fracht für 8 Zentner Waare, welche er 13 Meilen gefahren hat; wieviel Fracht müßte er bekommen, wenn er 26 Zentner 30 Meilen weit führe? Man sieht leicht,

leicht, daß sich die Fracht nicht bloß nach der Anzahl von Meilen, sondern auch nach dem Gewichte der Waaren richtet, also nach dem Verhältniß der Meilen sowohl als auch der Zentner muß bestimmt werden. Die gegebenen Verhältnisse sind nun 13 Meilen : 30 Meilen, und 8 Zentner : 26 Zentner. Von dem zu bestimmenden Verhältniß ist das erste Glied, nämlich 10 Rthlr., gegeben. Gesetzt nun, das Gewicht der Waare bliebe dasselbe, so würde die Fracht bloß nach den Meilen zu bestimmen seyn, und man hätte aus

$$13 \text{ Meil.} : 30 \text{ Meil.} = 10 \text{ Rtl.} : y;\ y = \frac{30 \times 10}{13}.$$

Wenn aber nun 26 Zentner statt 8 Zentner sollten aufgeladen werden, wieviel Fracht würde man dann bezahlen müssen? Dies ergiebt sich aus

$$8 \text{ Zentner} : 26 \text{ Zentner} = y : x.$$

Beide Proportionen untereinandergesetzt und in eine dritte nach §. 61 verwandelt

$$\begin{array}{l} 13 \text{ Meilen} : 30 \text{ Meilen} = 10 \text{ Rthlr.} : y. \\ \underline{8 \text{ Zentner} : 26 \text{ Zentner} = y \qquad : x.} \\ 13 \times 8 : 30 \times 26 = 10 \text{ Rthlr.} : x. \end{array}$$

giebt $x = \frac{30 \times 26 \times 10}{13 \cdot 8} = 150$ Rthlr.

Also macht allemal das Product aus den zweiten Gliedern der gegebenen Verhältnisse und dem gegebenen Gliede des zu bestimmenden Verhältnisses den Dividendus, und das Product aus den ersten Gliedern der gegebenen Verhältnisse den Divisor aus, wodurch x bestimmt wird.

§. 81.

Die für alle Fälle zu beobachtenden Regeln sind nun folgende.

1) Man sucht die in der Aufgabe gegebenen Verhältnisse, die durch ihre gleichnamigen Glieder leicht zu finden sind. Manchmal können sie auch versteckt seyn. Anmerkung zu §. 64.

2) Die Glieder der gefundenen Verhältnisse werden so geordnet, daß alle Glieder, welche auf das erste Glied des zu bestimmenden Verhältnisses sich beziehen, linker Hand unter einander, die andern rechter Hand unter einander stehen.

3) Sollten die Glieder der Verhältnisse aus mehreren und verschiedenen Sorten bestehen, so verfährt man nach §. 63.

4) Aus beiden Kolumnen schafft man die Brüche weg, nach §. 59, und befinden sich in beiden Kolumnen Zahlen, die einen gemeinschaftlichen Divisor haben: so dividirt man mit diesem beide Zahlen, und setzt statt derselben die Quotienten hin. §. 59, 2.

5) Man multiplicirt darauf die untereinanderstehenden Zahlen in einander, und aus dem Verhältnisse der Producte und dem zu bestimmenden Verhältniß findet man x nach §. 56.

§. 82.

Einige Beyspiele zur Erläuterung der gegebenen Regeln.

1) Wieviel pC. geben $3234\frac{1}{2}$ Rthlr. in $6\frac{2}{3}$ Jahren, wenn der Zinsfuß 4 pC. ist?

Nach 1, und 2 §. 81

1 Jahr : $6\frac{2}{3}$ Jahr

100 Rt : $3234\frac{1}{2}$ Rt.

nach

nach 4,

$3 : 20$ und einfacher $3 : 1$

$200 : 6469$ $\quad 10 : 6469$

nach 5,

$30 : 6469 = 4 : x$ oder

$15 : 6469 = 2 : x$ nach §. 60.

$$x = \frac{6469 \times 2}{15} = 862\tfrac{8}{15} \text{ Rthlr.}$$

Anstatt aber immer einen neuen Aufsatz zu machen, pflegt man die Zahlen, welche nicht mehr gelten sollen, zu durchstreichen, und die neuen ihnen zur Seite zu schreiben.

$3.\ \cancel{1}$ Jahr : $\cancel{6\tfrac{2}{3}}$ Jahr 20

$10.\ \cancel{200}.\ \cancel{100}$ Rtl. : $\cancel{3234\tfrac{1}{2}}$ Rthlr. 6469.

$$30 : 6469 = 4 : x.$$
$$15 : 6469 = 2 : x.$$

2) Eine Mauer 6 Ellen lang, $\tfrac{1}{2}$ Elle dick, $6\tfrac{1}{2}$ Ellen hoch kommt an Arbeitslohn 9 Rthlr., wie hoch kommt eine Mauer 24 Ellen lang, $1\tfrac{1}{3}$ Elle breit, und 9 Ellen hoch?

Nach 1, 2 §. 81

6 Ellen l. : 24 Ellen l.

$\tfrac{1}{2}$ — b. : $1\tfrac{1}{3}$ — b.

$6\tfrac{1}{2}$ — h. : 9 — h.

nach 4,

$6 : 24$ $\quad 1 : 4$

$3 : 8$ und einfacher $1 : 8$

$13 : 18$ $\quad 13 : 6$

nach 5, $13 : 192 = 9 : x$, und $x = \frac{192 \times 9}{13} = 117\tfrac{7}{13}$ R.

Also gewöhnlich $\cancel{6}$ Ell. l : $\cancel{24}$ Ell. l. 4

$\cancel{3}.\ \tfrac{1}{2}$ — b. : $\cancel{1\tfrac{1}{3}}$ — b. $\cancel{2\tfrac{2}{3}}$. 8

$13.\ \cancel{6\tfrac{1}{2}}$ — h. : $\cancel{9}$ — h. $\cancel{18}$. 6

$$13 : 192 = 9 : x.$$

Fol.

Folgende Aufgabe gehört zur Gesellschaftsrechnung. A hat zum Handel 1000 Rtl. seit $2\frac{1}{2}$ Jahren, B 2500 Rtl. seit 2 Jahren, C 3000 seit $1\frac{1}{2}$ Jahren hergegeben, damit sind 10520 Rthlr. gewonnen, wieviel bekommen A, B, C von dem Gewinn?

Wenn man überlegt, daß das angelegte Geld eine gewisse Zeit brauchte, um einen gewissen Gewinn zu bewürken: so wird man leicht einsehn, daß die Gewinne sich verhalten müssen, wie die Producte aus dem angelegten Gelde in die Zeiten. Das Hauptverhältniß besteht aus der Summe der Producte der angelegten Summen in die Zeiten und aus der Summe der Gewinne, oder es ist $1000 \times \frac{9}{4} + 2500 \times 2 + 3000 \times \frac{3}{2} : 10520$ oder $1000 \times \frac{9}{4} + 2500 \times \frac{8}{4} + 3000 \times \frac{6}{4} : 10520$ folglich

$$1000 \times \tfrac{9}{4} + 2500 \times \tfrac{8}{4} + 3000 \times \tfrac{6}{4} : 10520 = \begin{cases} 1000 \times \tfrac{9}{4} : x \\ 2500 \times \tfrac{8}{4} : y \\ 3000 \times \tfrac{6}{4} : z \end{cases}$$

Wenn nun die Producte im ersten Gliede der Proportion einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so kann man sie durch diesen dividiren, und an ihrer statt die Quotienten hinschreiben, denn das dritte Glied der Proportion ist immer eins von den Producten (§. 60); also

$$1000 \times \tfrac{9}{4} + 2500 \times \tfrac{8}{4} + 3000 \times \tfrac{6}{4} = 9 + 20 + 18 = 47$$

und

$$47 : 10520 = \begin{cases} 9 : x & x = \frac{10520 \times 9}{47} = 2014\frac{22}{47} \\ 20 : y & y = \frac{10520 \times 20}{47} = 4476\frac{28}{47} \\ 18 : z & z = \frac{10520 \times 18}{47} = 4028\frac{44}{47} \end{cases}$$

A erhält $x = 2014\frac{22}{47}$
B — $y = 4476\frac{28}{47}$
C — $z = 4028\frac{44}{47}$

10520 = dem ganzen Gewinne.

§. 83.

§. 83.

Wenn die gegebenen Verhältnisse in einer Aufgabe aufgefunden sind, so hat man auch darauf zu achten, ob die Dinge in einem oder mehreren gegebenen Verhältnissen mit den Dingen in dem zu bestimmenden Verhältnisse im umgekehrten Verhältnisse stehen (§. 66); in diesem Falle muß jedes gegebene Verhältniß, wobey dieses statt findet, umgekehrt werden; z. B. wenn ein Fuhrmann für 3 Zentner $1\frac{1}{2}$ Meile zu fahren 36 Gr. bekommt, wieviel kann man ihm aufladen, wenn er für 45 Rthlr. 27 Meilen fahren soll. Die gegebenen Verhältnisse sind hier $1\frac{1}{2}$ Meile : 27 Meilen, und $\frac{1}{2}$ Rthlr. : 45 Rthlr. Da nun der Fuhrmann für dasselbe Geld eine geringere Last mehrere Meilen, und eine größere wenigere Meilen fahren wird; so stehen Fracht und Meilen im umgekehrten Verhältniß, und man muß setzen

$$\text{nicht}\ \left.\begin{array}{r} 1\frac{1}{2}\ \text{Meilen} : 27\ \text{Meilen} \\ \frac{1}{2}\ \text{Rthlr.} : 45\ \text{Rthlr.} \end{array}\right\} = 3 : x.$$

$$\text{sondern}\ \left.\begin{array}{r} 27\ \text{Meilen} : 1\frac{1}{2}\ \text{Meile} \\ \frac{1}{2}\ \text{Rthlr.} : 45\ \text{Rthlr.} \end{array}\right\} = 3 : x.$$

$$\begin{array}{l} \text{also}\ \cancel{9}.\cancel{27} : \cancel{1}\frac{1}{2}.\cancel{3}. \\ \qquad 1.\frac{1}{2} : \cancel{45}\ 5 \\ \hline \qquad 1 : 5 = 3 : x,\ \text{und}\ x = 15\ \text{Zentner}. \end{array}$$

Wie groß muß ein Kapital seyn, welches, wenn es zu 5 pC. belegt wird, in 3 Jahren $97\frac{1}{2}$ Rthlr. Zinse bringt? Die gegebenen Verhältnisse sind 1 Jahr : 3 Jahr; und 5 Rthlr. Zinse : $97\frac{1}{2}$ Rthlr. Zins. Wenn nun ein Kapital eine bestimmte Summe an Zinsen aufbringen soll, so werden bey einem kleinen Kapitale mehrere Jahre, bey einem größern wenigere Jahre dazu erfordert. Man setzt also

nicht 1 Jahr : 3 Jahr
5 Rt. Z. : $97\frac{1}{2}$ Rt. Zinse $=$ 100 : x.

sondern 3 Jahr : 1 Jahr
5 Rt. Z. : $97\frac{1}{2}$ Rt. Zinse $=$ 100 : x.

und also $\cancel{3} : 1$
$2.\cancel{1}\cancel{0}.\cancel{5} : \cancel{9}\cancel{7}\cancel{\tfrac{1}{2}}.\cancel{1}\cancel{9}\cancel{5}.\cancel{3}\cancel{9}.13$

$2 : 13 = 100 : x$
$1 : 13 = 50 : x$ und $x = 650$ R.

Wenn die Last Rocken 90 Rthlr. gilt, so soll ein 6 Groten Brodt 3 Pfund $29\frac{1}{2}$ Loth wiegen; wenn nun die Last auf 45 Rthlr. fiele, wieviel muß dann ein 4 Groten Brodt wiegen? Kornpreise und das Brodtgewicht stehen in einem umgekehrten Verhältniß, also

nicht 90 Rthlr. : 45 Rthlr.
6 : 4 $= 125\frac{1}{2}$ Lt. : x

sondern 45 Rthlr. : 90 Rthlr.
6 : 4 $= 125\frac{1}{2}$ Lt. : x.

und $\cancel{5}\ \cancel{4}\cancel{5} : \cancel{9}\cancel{0}\ \cancel{1}\cancel{0}\ 2$
$3\ \cancel{6} : \cancel{4}.2$

$3 : 4 = 125\frac{1}{2} : x$
$6 : 4 = 251 : x$
$3 : 2 = 251 : x$; $x = \frac{502}{3} = 167\frac{1}{3}$ Lt.
$= 5$ Pf. $7\frac{1}{3}$ Lt.

Funfzehntes Kapittel.

Von der Kettenregel.

§. 84.

Vergleichung von Maaßen, Gewichten und Geldsorten.

Zwey Gewichte werden verglichen, wenn man dieselbe Quantität Waare nach beiden bestimmt, die Gewichte selbst aber werden mit den verschiedenen Zahlen von Pfunden, Lothen u. s. w. welche die Bestimmung gab, in einem umgekehrten Verhältniß stehen. Wenn eine gewisse Quantität Waare in Oldenburg 784 Pfund wiegt, und dieselbe in Bremen 777 Pfund; so sind 784 Oldenburger Pfund einerley mit 777 Bremer Pf.; und ein Oldenburger Pfund wird sich zum Bremer Pfund verhalten wie 777 : 784 oder wie 111 : 112. Eben dies gilt auch von Maaßen, nur daß dort gewogen, hier gemessen wird. Aus der Vergleichung also von verschiedenen Maaßen und Gewichten lernt man ihr Verhältniß zu einander kennen. Münzsorten mit einander vergleichen, heißt eine Anzahl Stücke von der einen Sorte bestimmen, welche mit einer bestimmten Anzahl Stücke von der andern Sorte gleichen Werth hat, dies ist dann erst möglich, wenn man weiß, wie sie sich zu einander verhalten. Ihr Verhältniß aber fängt nicht bloß von ihrem innern Gehalte, sondern auch von andern zufälligen Umständen ab.

Man kann aber auch zwey Gewichte oder Maaßen mittelbar mit einander vergleichen, ohne daß man eine Quantität Waare nach beiden bestimmt, wenn ein drittes Gewicht mit beiden verglichen ist, z. B. wenn die Frage wäre: Wie verhalten sich Londener Pfunde zu Venediger? und man wüßte, daß 16 Londener Pfund einerley mit 15 Hamburger Pfund wären, und 5 Hamburger einerley mit 8 Venediger; so könnte man erst 1 Londener Pfund nach Hamburger Pfunden bestimmen

16 Lond. Pf. : 15 Hamb. Pf. = 1 Lond. Pf. : y Hamb. Pf.

Nun wird sich leicht bestimmen lassen, was y Hamb. Pfund zu Venedig sind.

5 Hamb. Pf. : 8 Ven. Pf. = y Hamb. Pf. : x Ven. Pf.

Setzt man beide Proportionen unter einander, so ist nach §. 61

$$\begin{array}{l} 16\ \text{Lond. Pf.} : 15\ \text{Hamb. Pf.} \\ \ \ 5\ \text{Hmb. P.} : \ \ 8\ \text{Vened. P.} \end{array} = 1\ \text{Lond. Pf.} : x\ \text{Ven. Pf.}$$

Nun ist $x = \frac{15 \times 8}{5 \times 16} = \frac{3}{2}$, also 1 Lond. Pf. ist einerley mit $\frac{3}{2}$ Vened. Pf., und das Verhältniß des Londener Pf. zum Venediger ist wie $\frac{3}{2} : 1$ oder wie $3 : 2$.

Wollte man den Pariser Fuß mit dem Hamburger Fuß vergleichen, und man fände den Englischen Fuß mit dem Französischen aber nicht mit dem Hamburgischen verglichen; so müßte man einen vierten Fuß suchen, der mit dem Englischen und Hamburgischen verglichen wäre. Wenn nun 17 Hamburger Fuß = 16 Englische F.; und 14 Engl. F. = 15 Amsterdammer F., und 8 Amsterd. F. = 7 Französ. F. wärt; so würde man folgende Proportionen haben

17 Hamb. F. : 16 Engl. F. = 1 Hamb. F. : m Engl. F.
14 Engl. F. : 15 Amst. F. = m Engl. F. : n Amst. F.
8 Amst. F. : 7 Franz. F. = n Amst. F. : x Franz. F.
und nach §. 61

$$\left.\begin{array}{l} 17\ \text{Hamb. F.} : 16\ \text{Engl. F.} \\ 14\ \text{Engl. F.} : 15\ \text{Amst. F.} \\ 8\ \text{Amst. F.} : 7\ \text{Franz. F.} \end{array}\right\} = 1\ \text{Hmb. F.} : x\ \text{Franz. F.}$$

und nach §. 64

$$\left.\begin{array}{r} x\ \text{Franz. F.} \\ 17\ \text{Hmb. F.} \\ 14\ \text{Engl. F.} \\ 8\ \text{Amst. F.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1\ \text{Hamb. F.} \\ 16\ \text{Engl. F.} \\ 15\ \text{Amst. F.} \\ 7\ \text{Franz. F.} \end{array}\right.$$

$$x.17.14.8 = 1.16.15.7$$
$$x.17 = 15$$
$$x = \tfrac{15}{17}$$

also 1 Hamb. F. einerley mit $\frac{15}{17}$ Franz. F.; und der Hamb. F. verhält sich zum Franz. F. wie $\frac{15}{17}$: 1, oder wie 15 : 17.

Statt des Multiplicationszeichens $\times$ ist hier (.) gebraucht.

§. 85.

Allgemeine Regel für solche Vergleichung.

Will man zwey Gewichte oder Maaßen oder Münzsorten mittelbar mit einander vergleichen, nämlich M und N, so suche man ein drittes Gewicht oder Maaß oder eine dritte Münzsorte, welche schon mit M und N verglichen ist, diese sey B. Nun sey mM = nB, und pB = qN, wenn m, n, p, q Zahlen bedeuten. Nun setze man 1M = xN, und schreibe xN linker Hand hin, ihm gegenüber 1M; unter xN setze man mM, ihm gegenüber das, womit es gleich ist, nämlich nB; unter mM setze man pB, und ihm gegenüber das, womit es gleich ist, nämlich qN. Also

$$\begin{array}{c} xN - 1M \\ mM - nB \\ pB - qN \\ \hline x.m.p = n.q \text{ oder } x = \frac{n.q}{m.p} \end{array}$$

Also 1M ist einerley mit $\frac{n.q}{m.p}$ N; oder m. p. M ist einerley mit n. q. N, und M verhält sich zu N wie n. q : m. p.

Fände man aber B nur mit M verglichen, aber nicht mit N, so müßte man ein viertes suchen, welches mit B und N verglichen wäre, dies sey C, und es sey nun rB = tC, und uC = rN, wo r, t, u, v wieder Zahlen bedeuten. Wenn man nun xN linker Hand, und ihm gegenüber rechts 1M hingeschrieben, so ordne man das übrige so, daß man unter xN das setzt, was mit 1M gleichnamig ist, also mM, ihm gegenüber, was mit ihm einerley ist, also nB; unter mM das, was mit nB gleichnamig ist, also rB; ihm gegenüber, was mit ihm einerley ist, also tC; unter rB das, was mit tC gleichnamig ist, also uC, ihm gegenüber, was mit ihm einerley ist, u. s. w.

$$\begin{array}{c} xN - 1M \\ mM - nB \\ rB - tC \\ uC - vN. \\ \hline x.m.r.u. = n.t.v \text{ und } x = \frac{n.t.v.}{m.r.u.} \end{array}$$

Also

Also 1M ist einerley mit $\frac{n.t.v}{m.r.u.}$ N, oder m. r. u. M ist einerley mit n.t.v.N, und M verhält sich zu N wie n.t.v. : m.r.u. Wäre nun C wohl mit B aber nicht mit N verglichen, so müßte man ein fünftes suchen, dies sey D; wenn nun bC = cD, und eD = fN, so hat man, wenn die gegebene Regel in Rücksicht der Ordnung befolgt wird

$$\begin{array}{r} xN = 1M \\ mM = nB \\ rB = tC \\ bC = cD \\ eD = fN \\ \hline \end{array}$$

$$x.m.r.b.e = n.t.c.f., \text{ und } x = \frac{n.t.c.f.}{m.r.b.e}$$

Also 1M ist einerley mit $\frac{n.t.c.f.}{m.r.b.e}$ N, oder m.r.b. e.M ist einerley mit n.t.c.f.N, und M verhält sich zu N wie n.t.c.f : m.r.b.e.

Wenn nun D wohl mit C aber nicht mit N verglichen wäre, so müßte man ein sechstes suchen, welches mit D und N verglichen wäre, und übrigens wie oben verfahren. Einige Beyspiele werden die Regel deutlich machen.

Man soll Dukaten mit Oldenburger kl. Cour. vergleichen, oder finden, wieviel 1 Dukate in Oldenburger kl. Cour. ist. Wenn nun 1 Dukate = 2 Rthlr. Dukat; 100 Rthlr. Duk. = 100$\frac{3}{8}$ Rthlr. Hamb. Bco., und 100 Rthlr. Hamb. Bco. = 130 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel, endlich 100 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel = 125 Rthlr. Oldenburger kl. Cour. ist so hat man

x Rt. Old. kl. Cour.	—	1 Dukat.
1 Dukat	—	2 Rthlr. Dukat
100 Rthlr. Dukat	—	$100\frac{3}{4}$ Rthlr. Hamb. Bo.
100 Rthlr. Hamb. Bo.		130 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel
100 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel	—	125 Rtlr. Old. kl. Cour.

1 Dukat ist einerley mit $3\frac{409}{1600}$ Rtl. Oldenb. kl. Cour.

Man soll Dänische Thaler mit Thalern in Louisd'or vergleichen, oder finden, wieviel 1 Dänischer Thaler in Thalern in Louisd'or ist. Wenn nun $123\frac{3}{4}$ Rthlr. Dän. = 100 Rthlr. Hamb. Bo.; $101\frac{7}{8}$ Rthlr. Hamb. Bo. = 100 Rthlr. Dukat. Bo., 2 Rthlr. Dukat Bo. = $2\frac{3}{4}$ Rthlr. Leip. Dukat, und 100 Rthlr. Leip. Dukat. = $103\frac{1}{8}$ Rthlr. in Louisd'or ist, so hat man

x	Rtlr.	in Louisd'or	—	1	Rtlr.	Dän.
$123\frac{3}{4}$	—	Dän.	—	100	—	Hamb. Bo.
$101\frac{7}{8}$	—	Hamb. Bo.	—	100	—	in Duk. Bo.
2	—	Duk. Bo.	—	$2\frac{3}{4}$	—	Leip. Dukat.
100	—	Leip. Dukat.	—	$103\frac{1}{8}$	—	in Louisd'or.

1 Rtl. Dän ist einerley mit $1\frac{671}{5379}$ Rtl. in Louisd.

Wie das letzte aus dem Aufsatze ist gefunden worden, soll unten deutlich gezeigt werden; für jetzt beschäftigt uns noch die Frage, wie solche Aufgaben richtig aufzusetzen sind.

§. 86.

Der Aufsatz ist eine Gleichung, deren beyde Hälften aus Factoren bestehen. Der oberste Factor in der Kolumne rechter Hand ist mit dem zweiten in der Kolumne linker Hand; der zweite Factor in jener mit dem dritten in dieser; der dritte Factor in jener mit dem vierten in dieser, u. s. w.; der letzte

letzte in jener mit dem obersten in dieser gleichnamig; und jedem Factor in der Kolumne linker Hand steht das, was mit ihm einerley ist, in der Kolumne rechter Hand gegenüber. Daß dieses immer in Fällen dieser Art statt finden muß, erhellet aus den §. 84 unter einander gesetzten Proportionen; in jeder von diesen ist das zweite Glied und das vierte gleichnamig, so auch das letzte Glied jeder vorhergehenden mit dem ersten Gliede der nachfolgenden. Wegen dieser Folge von gleichnamigen Factoren nennt man diese Gleichung einen **Kettensatz**, und die Anweisung eine solche Gleichuug aufzusetzen und aufzulösen die **Kettenregel**.

§ 87.

Die Aufgaben, worin gefragt wird, wieviel eine bestimmte Anzahl Einheiten von einem gewissen Maaße oder Gewichte oder einer Münzsorte nach einem andern Maaße oder Gewichte oder in andern Münzsorten betragen, sind in jeder Rücksicht mit den vorigen Aufgaben gleich, werden also nach eben der Regel aufgesetzt, nur schreibt man statt 1 M §. 85 die gegebene Anzahl Einheiten hin, z. B. Wieviel betragen 3600 Mark Hamburger Bco. in Oldenburger fl. Cour. Wenn man nun findet, daß 3 Mark Bco. = 1 Rthlr. Bco.; 100 Rthlr. Bo. = 134 Rthl. in N$\frac{2}{3}$tel und 100 Rthl. in N$\frac{2}{3}$tel = 130 Rthlr. in fl. Cour. ist; so ist der Aufsatz

x Old. fl. Cour.	—	3600 Mark Hamb. Bco.
3 Mark Hmb. Bo.	—	1 Rtlr. Hamb. Bco.
100 Rthl.	— — —	134 in N$\frac{2}{3}$tel
100 — in N$\frac{2}{3}$tel	—	130 in Oldenb. fl. Cour.

also 3600 Mk. Hb. B. einerley mit 2090$\frac{2}{5}$ R. Old. fl. C.

Wieviel betragen 6 Lübecker Last Korn nach Oldenburger Maaße. Nun sind 69 Lübecker Last = 70 Last Hamburger; und $8\frac{29}{30}$ Last in Hamburg = 9 Last Oldenb. Maaß.

$$
\begin{array}{lcl}
x \text{ Last Oldenb.} & — & 6 \text{ Last Lüb.} \\
69 — \text{Lüb.} & — & 70 — \text{Hamb.} \\
8\frac{29}{30} — \text{Hamb.} & — & 9 — \text{Oldenb.} \\
\hline
\end{array}
$$

also 6 Lübeck. Last sind $6\frac{678}{6187}$ Last in Oldenburg.

§. 88.

Diese Art des Verfahrens, Gewichte, Maaßen und Münzsorten mit einander zu vergleichen, ist von vorzüglichem Nutzen bey Proportionen, wo die Glieder der Verhältnisse zwar unter dem allgemeinen Namen von Gewicht, Maaß und Geld stehen, aber doch ihrer Art nach von einander verschieden sind. In diesem Falle sind die Verhältnisse in den Aufgaben auch nur angedeutet, und nicht bestimmt, denn in einem jeden Verhältniß müssen die Einheiten in beiden Gliedern durchaus gleichartig seyn, oder in beiden Gliedern müssen dieselben Einheiten seyn. Die Einheiten des einen Gliedes können nun auf Einheiten des andern gebracht werden durch die Reduction oder Resolution, wenn die Einheiten des einen Gliedes in den Einheiten des andern als niedere Einheiten in einer höhern enthalten sind, oder, wenn dies nicht der Fall ist, durch Vergleichung, indem man statt des einen Gliedes ein anderes setzt, welches mit ihm einerley ist, und dessen Einheiten mit den Einheiten des andern Gliedes gleichartig sind. Diese Vergleichung läßt sich auch im ersten Falle anbringen, wie bald soll gezeigt werden. Wenn die Frage wäre, was eine Oldenburger Elle koste, wenn eine Englische Yard 6 Schill. 3 Pfenn. Sterling zu stehen kommt. Die Proportion wäre nun

1 Engl. Yard : 1 Old. Elle = 6 Sch. 3 Pf. Sterl. : x G.

Hier sind die Verhältnisse nur angedeutet, und es muß erst bestimmt werden, was eine Engl. Yard mit einer Oldenburgischen Elle verglichen ist, und wieviel 6 Sch. 3 Pf. Sterl. in Oldenburger Groten betragen, bevor man den Werth von x finden kann. Wenn nun 6 Oldenburger Ellen = $3\frac{7}{10}$ Engl. Yards sind; so ist nach §. 85

y Engl. Yard — 1 Oldenb. Elle
6 Oldenb. Ell. — $3\frac{7}{10}$ Engl. Yard.

Also 1 Oldenb. Elle = $\frac{3\frac{7}{10} \times 1}{6}$ Engl. Yard, dies sey $\frac{m}{n}$ Engl. Yard, wo n 6 ist. Nun muß noch der Werth von 6 Sch. 3 Pf. Sterl. in Oldenburger Groten ausgedruckt werden. Wenn nun 20 Sch. Sterl. = 1 Pfd. Sterl.; 1 Pfd. St. = 35 Sch. 4 Pf. vls. Amsterdammer Bo.; $8\frac{1}{3}$ Sch. vls. Amst. Bo. = 1 Rthlr. Amst. Bo.; 100 Rthlr. Amst. Bo. = $141\frac{1}{4}$ Rthlr. in Golde, und 100 Rthlr. in Golde = 115 Rthlr. Oldenb. Cour.; endlich 1 Rthlr. = 72 Grote, so ist nach §. 85

x Oldenb. Grote	— $6\frac{1}{4}$ Sch. Sterl.
20 Sch. Sterl.	— 1 Pf. Sterl.
1 Pf. Sterl.	— $35\frac{1}{3}$ Sch. vls Amst. Bo.
$8\frac{1}{3}$ S. vls. Ast. Bo.	— 1 Rthlr. Amst. Bo.
100 Rthl. Amst. Bo.	— $141\frac{1}{4}$ Rthlr. in Golde.
100 Rthl. in Golde	— 115 Rthlr. Old. Cour.
1 Rthlr.	— 72 Grote.

Die

Die Producte zusammen in der Kolumne rechter Hand mag p ausdrücken, und die bekannten Producte zusammen in der Kolumne linker Hand mögen q seyn, so sind $6\frac{1}{4}$ Sch. Sterl. einerley mit $\frac{p}{q}$ Grote. Also hätte man nun die Proportion

1 Engl. Yard : $\frac{m}{n}$ Engl. Yard = $\frac{p}{q}$ Grote : x Grote.

und es wäre $x = \frac{m \times p}{n \times q}$.

Wenn man nun die Aufgabe nach §. 64 aufsetzt, nämlich

x Grote	— 1 Oldenb. Elle
1 Engl. Yard	— $6\frac{1}{4}$ Sch. Sterl.

so kann man die Factoren, welche durch m ausgedruckt sind, unter den ersten Factor der Kolumne rechter Hand; die, welche durch p ausgedrückt sind, in ihrer Ordnung unter den zweiten Factor der Kolumne rechter Hand; die, welche durch n ausgedrückt sind, unter den ersten Factor der Kolumne linker Hand; und die, welche durch q ausgedrückt sind, unter den zweiten Factor derselben Kolumne setzen. Dann hat man

x Grote	— 1 Oldenb. Elle
6 Oldenb. Ell.	— $3\frac{7}{10}$ Engl. Yard
1 Engl. Yard	— $6\frac{1}{4}$ Sch. Sterl.
20 Sch. Sterl.	— 1 Pf. Sterl.
1 Pf. Sterl.	— $3\frac{1}{3}$ Sch. vls. Amst. Bo.
$8\frac{1}{3}$ Sch. vls. Amst. Bo.	— 1 Rthlr. Amst. Bo.
100 Rthlr. Amst. Bo.	— $141\frac{1}{4}$ Rthlr. in Golde.
100 Rthlr. in Golde	— 115 Rthlr. Old. Cour.
1 Rthlr.	— 72 Grot.

Um sich von der Richtigkeit des Aufsatzes auf das augenscheinlichste zu überzeugen, darf man nur

nur versuchen, die Aufgabe nach der gewöhnlichen Regeldetri aufzulösen, und die Proportionen unter einander setzen; man würde folgende Sätze nach und nach zu berechnen haben.

6 Old. Ell.: $3\frac{7}{10}$ Egl. Yard = 1 Old. Ell. : m Egl. Yard
1 Egl. Yard: $6\frac{1}{4}$ Sch. Sterl. = m Egl. Y. d : n Sch. St.
20 Sch. Sterl.: 1 Pf. Strl. = n Sch. St.: p Pf. St.
1 Pf. St.: $35\frac{1}{3}$ S. vl. Ast. B. = p P. St. : q S. v. A. B.
$8\frac{1}{3}$ S. v. Ast. B.: 1 R. Ast. B. = q S. v. B. : r Rt. A. B.
100 Rt. Ast. B.: $141\frac{1}{4}$ R. G. = r R. Ast. B : s Rt. G.
100 Rt. G.: 115 Rt. Old Cr. = s Rt. G. : t Rt. Ol. Cr.
1 Rtlr. : 72 Grot = t R. Ol. Cr.: x Gr.

Verfährt man nun nach §. 61 und 64, so kommt der vorige Aufsatz.

Eine andere Aufgabe. Wenn 2 Quentin 3 Grote kosten, wieviel Louisd'or kommen 8 Zentner? Die Aufgabe als Gleichung aufgesetzt ist

x Louisd. — 8 Zent.
2 Quent. — 3 Grot.

Die Zentner durch Vergleichung zu Quentin gemacht

x Louisd. — 8 Zent.
1 Zent. — 100 Pf.
1 Pf. — 32 Loth.
1 Loth — 4 Quent.
2 Quent. — 3 Grot.

und nun die Grote durch Vergleichung zu Louisd'or gemacht

x Louisd. — 8 Zent.
1 Zent. — 100 Pf.
1 Pf. — 32 Loth
1 Loth — 4 Quent.
2 Quent. — 3 Grot.
72 Grot — 1 Rthlr.
5 Rthlr. — 1 Louisd.

Ein

Ein Versuch, diese Aufgabe durch die gewöhnliche Regeldetri aufzulösen, wird, wenn man die Proportionen unter einander setzt, denselben Aufsatz geben.

§. 89.

Eine allgemeine Regel solche Aufgaben richtig aufzusetzen würde folgende seyn. A, B, C, D, F, G, H, Z mögen Arten von Gewicht, Maaß und Münzsorten bedeuten; m, n, b, c, d, e, g, h, i, k, l, p, q, r, s sollen Zahlen vorstellen; wenn z. B. A Grote bedeutete, und p die Zahl 6 wäre, so drückte pA 6 Grote aus. Man wird in einer jeden Aufgabe leicht entdecken können, ob ein paar Größen nur sollen mit einander verglichen werden, oder ob eine Größe durch eine gegebene Proportion zu suchen sey. Im ersten Fall beobachtet man die Vorschrift des 85. §.; im zweiten sey die Proportion allgemein

$$nA : mB = iC : xZ$$

Hier müssen A und B beide entweder unter dem allgemeinen Namen von Gewicht oder Maaß oder Geld stehen; so auch C und Z. Diese Proportion als Gleichung nach §. 65 geordnet ist

$$xZ — mB$$
$$nA — iC$$

Sind nun die Einheiten A und B nicht dieselben, oder A und B von verschiedener Art, so muß man durch Vergleichung die Einheiten von A durch Einheiten von B ausdrücken. Gesetzt man fände nun $bB = cD$, $dD = eF$, $gF = hA$, so wäre

xZ — mB
bB — cD
dD — eF
gF — hA
nA — iC

Sind ferner die Einheiten Z und C nicht dieselben, oder Z und C von verschiedener Art, so muß man durch Vergleichung die Einheiten von C durch Einheiten von Z ausdrücken. Gesetzt man fände nun xC = lG; pG = qH, rH = sM, tM = vZ; so wäre der ganze Aufsatz

xZ — mB
bB — cD
dD — eF
gF — hA
nA — iC
kC — lG
pG — gH
rH — sM
tM — vZ

Hier sind nun die Einheiten jedes Factors in der Kolumne rechter Hand und die jedes um eine Stelle niedrigern Factors in der Kolumne linker Hand dieselben, und nimmt man die vier Glieder der Proportion aus, so steht jedem Factor in der Kolumne linker Hand derjenige in der Kolumne rechter Hand gegenüber, mit welchem er einerley ist. §. 86.

Manchmal ist aber auch das Verhältniß von A zu B, und das von C zu Z durch Zahlen gegeben. Gesetzt, es sey nun A : B = a : f; so ist f × A = a × B; das Glied des Zahlenverhältnisses also, was sich auf A bezieht, muß man unter

mB;

mB; das, was sich auf B bezieht, unter nA setzen. So auch, wenn C : Z = u : w; so ist $w \times C = u \times Z$; also muß man das Glied des Zahlenverhältnisses, was sich auf Z bezieht, unter iC, das andere, was sich auf C bezieht, in die Kolumne linker Hand jenem Gliede gegenüber setzen, z. B. Ein Loth schwer Gewicht kostet 2 gGr. Cassengeld, wieviel Louisd. in Golde kosten 28 Zent. leicht Gewicht?

Die Proportion nach §. 65 ist

x Louisd. Gold — 28 Zent. l. G.
1 Loth schw. Gew. — 2 gGr. Casseng.

Die Zentner werden nun zu Lothen gemacht

x Louisd. Gold — 28 Zent. l. G.
1 Zentn. l. G. - - 100 Pf. l. G.
1 Pf. l. G. — 32 Loth l. G.
1 Loth schw. G. — 2 gGr. l. G.

Verhält sich nun das leichte Gewicht zum schweren, wie 100 : 105, so ist

x Louisd. Gold — 28 Zent. l. G.
1 Zentn. l. G. — 100 Pf. l. G.
1 Pf. l. G. — 32 Loth l. G.
105 Pf. l. G. — 100 Pf. schw. G.
1 Loth schw. G. — 2 gGr. Casseng.

Die gGr. müssen nun zu Louisd. gemacht werden, und Cassengeld verhält sich zu Gold, wie 15 : 14, also

x Louisd. Gold	—	28 Zent. l. G.
1	—	100 Pf. l. G.
1	—	32 Loth l. G.
105	—	100 schw. G.
1	—	2 gGr. Casseng.
24	—	1 Rthlr. Casseng.
5	—	1 Louisd. Casseng.
14	—	15 Gold.

Da

Da der erste Factor in der Kolumne rechter Hand mit dem zweiten der Kolumne linker Hand; der zweite in jener, mit dem dritten in dieser u. s. w. nach §. 86 gleichnamig ist: so pflegt man die Benennungen in der Kolumne linker Hand wegzulassen.

Anmerkung 1. Ausserdem können in einem Kettensatze noch andere Verhältnisse vorkommen, welche die Aufgabe bestimmt enthält, als Abzüge von Kaufgeldern, Porto und andere Unkosten (Spesen) wenn sie nach Procenten bestimmt sind, welche eigentlich zum Kettensatze nicht gehören, und deswegen in Rücksicht der Folge gleichnamiger Factoren, von welcher §. 86. die Rede war, eine Ausnahme machen. Um die Glieder solcher Verhältnisse zu ordnen, braucht man nur zu überlegen, ob durch ein solches Verhältniß x soll größer oder kleiner werden; im ersten Falle setzt man das größte Glied eines solchen Verhältnisses unten in die Kolumne rechter Hand, im zweiten Fall unten in die Kolumne linker Hand. Wenn aber die Aufgabe noch sonst etwas enthält, was addirt oder subtrahirt werden soll, so muß dieses besonders berechnet werden, und gehört nicht in den Kettensatz.

Anmerkung 2. Kommen mehrere Sorten in einem Factor vor, so werden die niedrigern als Brüche der höchsten ausgedrückt.

§. 90.

Die Behandlung des Kettensatzes um den Werth von x zu finden, gründet sich darauf, daß er eine Gleichung ist, deren Hälften aus lauter Factoren bestehen, die in beiden Hälften, wenn man den Factor 1 mitrechnet, in gleicher Anzahl sich befinden. Diese Factoren können nun entweder ganze Zahlen, oder Brüche, oder ganze Zahlen mit angehängten Brüchen seyn.

1) Ist ein Factor in der einen Kolumne ein Bruch, so läßt man den Nenner weg, und multiplicirt mit diesem irgend einen andern Factor in der andern Kolumne, z. B.

$$40 . \cancel{8} — \tfrac{3}{5} . 3$$

Ist ein Factor in der einen Kolumne eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch, so multiplicirt man mit des Bruches Nenner die ganze Zahl, und addirt dazu des Bruches Zähler, mit eben dem Nenner multiplicirt man noch irgend einen andern Factor in der andern Kolumne; z. B.

$$12 . \cancel{4} — \cancel{3} . \tfrac{2}{5} . 10$$

2) Hat irgend ein Factor in der einen Kolumne mit irgend einem andern Factor in der andern Kolumne einen gemeinschaftlichen Divisor, so dividirt man mit diesem beide Factoren, streicht diese aus, und setzt ihnen zur Seite die Quotienten, z. B.

$$3 . \cancel{24} — \cancel{8} . 1.$$

3) Das Product der nicht weggestrichenen Zahlen auf der einen Seite xp, ist gleich dem Product der nicht weggestrichenen Zahlen auf der andern q, oder $xp = q$ und $x = \frac{q}{p}$ §. 50. 4.

Setzt man die bloßen Zahlen vom ersten Beyspiele §. 88. hin, so ist

nach 1

$$
\begin{array}{rcl}
x & — & 1 \\
60 . \cancel{6} & — & \cancel{3}\tfrac{7}{10} . 37 \\
4 . \cancel{1} & — & \cancel{6}\tfrac{1}{4} . 25 \\
20 & — & 1 \\
3 . \cancel{1} & — & \cancel{3}\tfrac{1}{3} . 10 \\
25 . \cancel{8}\tfrac{1}{3} & — & \cancel{1} . 3 \\
400 . \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0} & — & \cancel{1}\cancel{4}\cancel{1}\tfrac{1}{4} . 565 \\
100 & — & 115 \\
1 & — & 7\cancel{2}
\end{array}
$$

nach

nach 2

$$\begin{array}{rcl}
x & - & 1 \\
20.\cancel{6}\cancel{0}.\cancel{6} & - & \cancel{3}\tfrac{7}{10}.37 \\
\cancel{4}.\cancel{1} & - & \cancel{6}\tfrac{1}{4}.\cancel{25} \\
\cancel{2}.\cancel{20} & - & 1 \\
\cancel{3}.\cancel{1} & - & \cancel{3}\tfrac{1}{2}.\cancel{10} \\
\cancel{25}.8\tfrac{1}{3} & - & 1.\cancel{3} \\
80.\cancel{400}.\cancel{100} & - & \cancel{141}\tfrac{1}{4}.\cancel{565}.113 \\
20.\cancel{100} & - & \cancel{115}.23 \\
1 & - & \cancel{72}.\cancel{9}.3
\end{array}$$

$$x \times 20 \times 80 \times 20 = 37 \times 113 \times 23 \times 3.$$

also $32000\,x = 288489$ und $x = \frac{288489}{32000} = 9\frac{489}{32000}$ Grot; also ungefähr 9 Grot $\frac{1}{20}$ Schw.

Die Brüche denke man sich in diesem §. durchstrichen, wegen Mangel an Formen konnte dieses hier nicht geschehen.

§. 91.

Zur Uebung will ich hier einige Beyspiele hinsetzen, und weiter unten werden mehrere folgen.

1) Wieviel Zentner leicht Gewicht kauft man für 1860 Rthlr., wenn 1 Loth schwer Gewicht mit 8 Schill. bezahlt wird? wenn 1 Zentner = 110 Pfund.

x Zent. l. G.	—	1860 Rthlr.
1	—	48 Sch.
8	—	1 L. sch. G.
32	—	1 Pf. schw. G.
100	—	1 Zent. schw. G.
100	—	105 l. G.

x = 3 Zent. 36 Pf. 6 Lt.

2) Wieviel Waare bekommt man für 100 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel, wenn 200 Zent. 412 Rthlr.

Gold kosten, und 100 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel = 108 Rthlr. Gold sind, und der Verkäufer 3 Procent Rabat giebt.

x Zent.	—	100 Rthlr. in N$\frac{2}{3}$tel.
100	—	108 Rthlr. Gold.
412	—	200 Zent.
100	—	103

x = 54 Zentner.

3) Wenn eine Elle Tuch mit 4$\frac{1}{4}$ Rtlr. Gold bezahlt wird, wieviel kauft man für 267$\frac{1}{2}$ Rthlr. Cour., wenn 113$\frac{1}{3}$ Cour. = 100 Rtr. Gold sind.

x Ellen	—	267$\frac{1}{2}$ Rthlr. Cour.
113$\frac{1}{3}$	—	100 Rthlr. Gold.
3$\frac{1}{4}$	—	1 Elle.

x = 72$\frac{38}{221}$ Ellen, ungefähr 72$\frac{1}{10}$ Elle.

4) Wenn 4 Zentner leicht Gewicht 200 Rtlr. Gold gekostet haben, um wieviel Grote Cour. kann man das Loth schwer Gewicht verkaufen, wenn man 20 Procent verdienen will, und das schwere Gewicht sich zum leichten verhält, wie 108 : 100, 100 Rthlr. Gold = 113$\frac{1}{2}$ Rthlr. Cour., und der Zent. = 110 Pf. ist.

x Grot	—	1 Loth schw. G.
100	—	108 l. G.
32	—	1 Pf l. G.
110	—	1 Zent. l. G.
4	—	200 Rthlr. Gold
1	—	72 Grote Gold
100	—	113$\frac{1}{3}$ Cour.

x = 1$\frac{277}{1100}$ Grot, ungefähr 1$\frac{1}{5}$ Grot.

5) 6 Amsterdammer Last kosten 200 Holländ. Gulden, wieviel Grote Cour. kommt der Scheffel in

in Oldenburg zu stehen, wenn 10 Procent soll verdient werden, 9 Last Oldenb. = 10 Last Amsterd. und 250 Gulden Amsterd. = 136 Rthlr. Gold, und 100 Rthlr. Gold = 113$\frac{1}{3}$ Rthlr. Cour. ist.

x Grot Cour.	—	1 Scheffel Old.
8	—	1 Tonne Old.
18	—	1 Last Old.
9	—	10 Last Amst.
6	—	200 Guld. Amst.
250	—	136 Rthlr. Gold.
100	—	113$\frac{1}{2}$ Rthlr. Cour.
1	—	72 Gr.
100	—	110.

x = 12$\frac{1132}{2025}$ Grot, ungefähr 12$\frac{1}{2}$ Grot.

§. 92.

Die Kettenregel kann auch auf die Regula Multiplex mit Vortheil angewandt werden, wenn die Glieder der in der Aufgabe gegebenen Verhältnisse §. 80. nicht gleichnamig sind, z. B. wieviel Thaler müssen in guten Gulden angelegt werden, um 12 Pferde 3 Jahr in Hafer zu unterhalten, wenn der Himte 15 Mgr. in Golde gilt; wenn man 2 Pferde mit 60 Rthlr. in Louisd'or 48 Wochen erhalten kann, wenn der Himte 24 Mgr. Cassengeld kostet, und 110 Rthlr. in Louisd'or = 100 Rthlr. in Gulden sind. Nun ist

2 Pferde : 12 Pferde
48 Mgr. Cass. : 3 J = 60 Rt. G : x in g Gld.
24 Wochen : 15 Mgr. Gold

oder x in guten Gulden — $\left\{\begin{array}{l}\text{12 Pferde}\\ \text{3 Jahr}\\ \text{15 Mgr. Gold}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\text{2 Pferde}\\ \text{48 Wochen}\\ \text{24 Mgr. Cass.}\end{array}\right.$ — 60 Rthlr. in Golde.

Man macht nun die Jahre zu Wochen, durch Vergleichung, und macht durch das schon bekannte Verhältniß das Cassengeld zu Gold, und drückt durch Vergleichung das Gold durch Gulden aus, so hat man den Aufsatz

x Rthlr. in Guld.	—	12 Pferde
2	—	3 Jahr
1	—	52 Wochen
48	—	15 Mgr. Gold
15	—	14 Casseng.
24	—	60 Rthlr. Gold
110	—	100 Rtl. in Guld.

$x = 620\frac{5}{11}$ Rthlr. in Gulden.

Ein anderes Beyspiel. Wenn der Himte 1 Rtlr. kostet, so kann man mit 200 Rtlr. in Golde 7 Domestiken $1\frac{1}{2}$ Jahr in Brod unterhalten; wieviel können gehalten werden, wenn man $2\frac{3}{4}$ Jahr mit 400 Rthlr. Cassengeld in Brode reichen will, und der Himte $1\frac{1}{4}$ Rthlr. kostet. Man muß nur merken, daß die Jahre nebst den Kornpreisen mit der Anzahl Domestiken im umgekehrten Verhältnisse stehen. Nun ist nach der Aufgabe

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\frac{3}{4}\text{ Jahr} & : & 1\frac{1}{2}\text{ Jahr} \\ 1\frac{1}{4}\text{ Rthl.} & : & 1\text{ Rtl.} \\ 200\text{ Rtl. G.} & : & 400\text{ Rt. C. M.} \end{array}\right\} = 7\text{ Dom.} : x\text{ Dom.}$$

Also der Kettensatz

x Domest.	—	$1\frac{1}{2}$ Jahr
$2\frac{3}{4}$	—	1 Rthlr.
$1\frac{1}{4}$	—	400 Casseng.
14	—	15 Gold
200	—	7 Domest.

$x = 6\frac{6}{11}$ Domestiken.

Ein

Ein drittes Beyspiel. Ein Fabrikant hat 3751 Arbeiter, und gebraucht des Jahrs 597 Rthlr. 5 gGr. 9 Pfenn Hannöv Casseng. für Brod, wenn er jedem täglich $\frac{1}{2}$ Pfund giebt, und der Himte Rocken 27 gGr. 4 Pf. Gold kostet; der Fabrikant will aber künftig nur $\frac{3}{4}$ des Geldes an Brod verwenden, schafft die Hälfte Arbeiter ab, der Kornpreis ist nun $\frac{1}{4}$ gestiegen, aber er ist jetzt Courant; wieviel Brod kann er nun jedem täglich geben.

Die Aufgabe ist nur dem Anscheine nach verwickelt. Die Zahl der Arbeiter und die Kornpreise stehen mit den Portionen Brod im umgekehrten Verhältnisse. Die Verhältnisse der Arbeiter und der jährlichen Kosten können sehr einfach ausgedrückt werden.

$\frac{1}{2}$ Arbeit : 1 Arbeiter

1 järl. K. Cg. : $\frac{3}{4}$ järl. K. G. = $\frac{1}{2}$ Pf. B. : x Pf. B.

$\frac{5}{4}$ Cour. — : 1 Gold

also der Kettensatz

x Pf. Brod — 1 Arbeiter

$\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ Gold

15 — 14 Casseng.

1 — 1 Gold

100 — $113\frac{1}{3}$ Cour.

$\frac{5}{4}$ — $\frac{1}{2}$ Pf. Brod.

x = $\frac{238}{375}$ Pf. Brod.

Sechszehntes Kapittel.

Kaufmännische Rechnungen.

§. 93.

Brutto, Netto, Thara.

Das, was eine Waare nebst dem Gefäße, oder demjenigen, worin sich die Waare befindet, wiegt, nennen Kaufleute **Brutto**; das aber, was eine Waare an sich wiegt, nennen sie **Netto**, den Unterschied dieses von jenem, **Thara**. Wenn von diesen Stücken zwey gegeben sind, so ist das dritte bekannt. Ob man das Thara addiren oder subtrahiren soll, giebt die Aufgabe an die Hand, je nachdem nach dem Brutto oder dem Netto gefragt wird, z. B. es sind 2 Säcke Waare angekommen, einer zu 215 Pfund, der anderr zu $211\frac{1}{2}$ Pfund; für beide ist $6\frac{3}{4}$ Pfd. Thara gerechnet; was muß für beide bezahlt werden, wenn das Pf. Netto 18 Gr. kostet? Die beiden Säcke wiegen zusammen $(215 + 211\frac{1}{2})$ Pf. — $6\frac{3}{4}$ Pf. $=$ $419\frac{3}{4}$ Pf. Netto. Also

x Rthlr.	—	$419\frac{3}{4}$ Pf.
1	—	18 Gr.
72	—	1 Rthlr.

x $= 104\frac{15}{16}$ Rtl. $=$ 104 Rtl. 67 Gr. $2\frac{1}{2}$ Sch.

Wieviel

Wieviel Butter kauft man für 26 Rthlr. 61 Gr. Gold, wenn 1 Pf. Netto 9 Grote Cour. kostet, und das Thara 14 Pf. ist?

x Pf. — 26 Rthlr. 61 Gr. Gold
100 — $113\frac{1}{3}$ Rthlr. Cour.
1 — 72 Grot.
9 — 1 Pf.

x = $223\frac{56}{135}$ Pf. Netto

folglich ($223\frac{56}{135} + 14$) Pf. = $237\frac{56}{135}$ Pf Brutto.

Ein Faß wiegt 16 Zent. $38\frac{1}{2}$ Pfd.; Thara an jedem Zent. 10 Pf.; wenn nun 1 Zent. Netto $7\frac{1}{9}$ Rthlr. kostet, wie theuer ist die Waare?

112 Pf. : $38\frac{1}{2}$ Pf. = 10 Pf. Thara : x Thara.
das Thara beträgt für $38\frac{1}{2}$ Pf., $3\frac{7}{16}$ Pf.
also 16 Zent. $28\frac{1}{2}$ Pf. = $1830\frac{1}{2}$ Pf.; der Zent. zu 112 P.
Thara = $163\frac{7}{16}$ Pf.

Netto = $1667\frac{1}{16}$ Pf.

Nun ist 112 Pf. : $1667\frac{1}{16}$ Pf. = $7\frac{1}{9}$ Rt. : x Rt.
x = 107 Rthlr. 25 Gr. $\frac{32}{911}$ Sch.

Anmerkung. Das Thara wird oft nach Procenten bestimmt, und wenn z. B. das Thara 14 Procent wäre, so setzt man entweder
114 : 100 = Bruttogewicht : Nettogewicht oder
100 : 86 = Bruttogewicht : Nettogewicht.
Das erste heißt Thara auf Hundert, das andere Thara in oder von Hundert, und das erste ist dem Verkäufer zuträglicher als das letzte.

§. 94.

Fusti.

Unter Fusti verstehen Kaufleute verdorbene und schadhaft gewordene Waare. Ist nun das

Fusti nebst seinem Preise, der natürlich geringer seyn muß, als der Preis der guten Waare, bestimmt, so kann man das Fusti von der guten Waare abziehen, und beides besonders berechnen. Sehr oft wird aber das, was von dem Preise für das Fusti abgehen soll, nach Procenten bestimmt, z. B. Es erhält jemand 17 Zentn. Waare, den Zentner zu 110 Pf. gerechnet, und muß 21 Rthl. in Pistolen zu 5 Rthlr. für 100 Pfund bezahlen; er bezahlt aber in Dukaten, welche im Cours 3 Procent besser sind. Das Thara war zu 2 Procent bestimmt, und für das Fusti 10 Procent Rabat bedungen: wieviel beträgt das Kaufgeld?

x Rthlr.	—	17 Zent.
1	—	110 Pf.
100	—	21 Rthlr. in Pistol.
103	—	100 Rthlr. in Dukat.
102	—	100 für Thara.
110	—	100 für Fusti.

$x = 339\frac{83}{153}$ Rtl. in Dukat.

Wenn 1224 Pf. kosten 1447 Rthlr. 8 Gr., Thara 96 Pf. ist, und sich unter der Waare 128 Pf. Fusti befinden, und 1 Pf. gute Waare $1\frac{1}{3}$ Rthlr. kostet, wie hoch ist 1 Pf. Fusti berechnet?

		1224 Pf.
Thara	=	96
Netto	=	1128
Fusti	=	128
guteW.	=	1000

1 Pfd. : 1000 Pfd. = $1\frac{1}{3}$ Rthlr. : x Rthlr.

Preis

Preis der guten Waare = $1333\frac{1}{3}$ Rthlr.
Preis der gemischten Waare = 1447 Rtlr. 8 Gr.
Preis der guten Waare = 1333 — 24 —

Preis der schlechten Waare = $113\frac{7}{9}$ Rthlr.
also 128 Pf. Fusti : 1 Pf. Fusti = $113\frac{7}{9}$ Rt. : x.
1 Pf. Fusti kostet 64 Grote.

§. 95.

Vom Disconto.

Wenn jemand etwas früher auszahlt, als er es nach dem ihm bestimmten Zahlungstermin nöthig hätte, so läßt sich denken, daß ihm die Summe während der Zeit noch hätte Zinsen bringen können, die ihm also der Empfänger der Summe vergüten muß. Er bezahlt also weniger deswegen, als er sonst hätte bezahlen müssen, und das, was er weniger bezahlt, heißt das Disconto. Einige hierhergehörige Aufgaben sind folgende.

1) Ein Kaufmann hat nach 9 Monaten 2120 Rthlr. zu zahlen, er will sogleich das Geld entrichten, wenn ihm 8 Procent rabattirt werden, wieviel ist der Abzug (Disconto, Rabat)?
Der Betrag der 8 Procent auf 9 Monate findet sich aus
12 Mon. : 9 Mon. = 8 : x, und x = 6 Procent.
Also 106 : 100 = 2120 : x, und x = 2000.
Er muß also sogleich 2000 Rthlr. bezahlen, und das Disconto ist 2120 — 2000 = 120 Rthlr.

2) Wenn jemand 1850 Rthlr., von welchen er 1200 in zwey Jahren, und den Rest in 3 Jahren bezahlen mußte, sogleich bezahlt, wenn 10

Procent

Procent rabattirt werden sollen; wie groß ist das Disconto? Nun ist für 1200

$120 : 100 = 1200 : y$; $y = 1000$ und das Disconto $= 1200 - 1000 = 200$.

Ferner für $1850 - 1200 = 650$

$130 : 100 = 650 : x$; $x = 500$, und das Disconto ist $650 - 500 = 150$.

Also das Disconto zusammen $= 200 + 150 = 350$, und die discontirte Summe, oder, was gleich bezahlt werden muß, ist $1850 - 350 = 1500$.

§. 96.

Gewinn- und Verlustrechnung.

Eine Waare wird oft durch Spesen, Impost, Accise, Zoll, Fracht u. s. w., dann auch durch den Profit, welchen der Kaufmann nimmt, vertheuert; und hier entsteht nun die Frage: wie muß verkauft werden, damit etwas bestimmtes durch den Handel gewonnen wird. Vor allen Dingen muß man wohl merken, daß die Unkosten, welche zu dem Einkaufspreise hinzukommen, wenn sie nach ihrer Summe gegeben sind, als etwas, welches addirt oder abgezogen werden muß, nicht mit in den Kettensatz gehören; sind sie aber durch Verhältnisse zu bestimmen, so gehören sie in denselben. Im ersten Falle nennt man sie **unproportionirt**, im zweiten **proportionirt**.

1) $419\frac{3}{4}$ Pf. sind mit 104 Rthlr. 22 gGr. 6 Pfenn. Gold eingekauft, die Fracht beträgt 15 Rthlr. 1 gGr. 6 Pfenn. und der Impost 6 pC. beides in Casseng., wieviel muß das Pf. kosten, wenn der Kaufmann 10 pC. gewinnen will?

Man

Man verwandelt den Einkaufspreis in Casseng.

$15 : 14 = 104$ Rtl. 22 gGr. 6 Pf. : y oder

$15 : 14 = 2518\frac{1}{2}$ gGr. : y

also ist $y = 2350$ gGr. $7\frac{1}{5}$ Pf. Casseng.

dazu die Fracht $= 361$ gGr. 6 Pf.

macht 2712 gGr. $1\frac{1}{5}$ Pf.

Nun ist

x gGr.	—	1 Pfd.
$419\frac{3}{4}$	—	$2712\frac{1}{10}$ gGr.
100	—	106
100	—	110

$x = 7$ gGr. $6\frac{851016}{2098750}$ Pf.

Das Pfund kann also verkauft werden ungefähr um 7 gGr. $6\frac{2}{5}$ Pf.

2) 120 Pfd. Thee kosten 360 Rthlr., wieviel kostet 1 Loth, wenn das Gewicht, wornach verkauft wird, schwer ist, und das leichte Gewicht zum schweren sich verhält wie 5 : 6, auch 20 pC. sollen gewonnen werden.

x Mgr.	—	1 Loth schw. G.
32	—	1 Pf. schw. G.
5	—	6 l. G.
120 Pfd.	—	360 Rthlr.
1	—	36 Mgr.
100	—	120

$x = 4$ Mgr. $6\frac{22}{25}$ Pf.

3) Eine Quantität Waare kostet 415 Rthlr., wird zu $446\frac{1}{8}$ Rthlr. verkauft, und soll in 6 Monaten bezahlt werden, wieviel Procente sind gewonnen?

Der Gewinn ist $446\frac{1}{8} - 415 = 31\frac{1}{8}$ Rtlr. also nach §. 81

415

$$\left.\begin{array}{l} 415 : 31\frac{1}{8} \\ 6 M. : 12 M. \end{array}\right\} = 100 : x$$

und $x = 15$ pC.

4) Es sind 100 Pf. für $63\frac{1}{3}$ Rthlr. eingekauft, beym Verkauf $4\frac{1}{2}$ Rthlr. verloren; wie theuer ist nun das Pf. verkauft.

Das gehobene Geld ist $63\frac{1}{3} - 4\frac{1}{2} = 58\frac{5}{6}$ Rthlr., also

x Gr.	—	1 Pf.
100	—	$58\frac{5}{6}$ Rthlr.
1	—	72 Gr.

$x = 42\frac{9}{25}$ Gr.

5) Es sind $6\frac{1}{3}$ Fuder Getreide zu 520 Rthlr. verkauft, und $33\frac{1}{3}$ Procent sind dabey gewonnen; wieviel kostet ein Fuder zum Einkauf?

$133\frac{1}{3} : 100 = 520 : x$ oder
$4 : 3 = 520 : x$ oder
$1 : 3 = 130 : x$ also $x = 390$ Rt.

Der ganze Gewinn $520 - 390 = 130$ Rthlr.

Der Einkaufspreis eines Fuders $= \frac{390}{6\frac{1}{3}} = 61\frac{11}{19}$ R.

§. 97.

Tauschhandel.

Waare gegen Waare umsetzen nennen Kaufleute **barattiren**, und Waaren werden nach ihren Preisen, die also bestimmt seyn müssen, mit einander verglichen.

1) 50 Pf. Thee, das Pf. zu 2 Rtlr. Gold, sollen mit Weizen, der Himte zu 30 Mgr. Cassengeld vertauscht werden; wieviel Himten muß man dafür geben?

x Hmt. Weizen — 50 Pf. Thee
1 — 2 Rthlr. Gold
15 — 14 Casseng.
1 — 36 Mgr.
30 — 1 Hmt. W.

x = 112 Himten Weizen

2) Es will jemand 625 Pfd., das Pfd. zu $13\frac{1}{4}$ gGr. und 100 Rthlr. baares Geld gegen Waare, das Pfd. zu $2\frac{1}{4}$ Rthlr. eintauschen, wieviel Pfd. wird er bekommen?

Der Werth von 625 Pfd. nebst den 100 Rthlr. sind $10681\frac{1}{4}$ gGr.; also

x Pfd. — $10681\frac{1}{4}$ gGr.
24 — 1 Rthlr.
$2\frac{1}{4}$ Rt. — 1 Pfd.

x = $197\frac{173}{216}$ Pfd.

3) Ein Kaufmann hat 90 Stück Tuch, das Stück zu 15 Rthlr. verkauft, $\frac{1}{8}$ baar, das übrige in Ellenwaaren empfangen; wieviel baares Geld und wieviel Ellenwaaren hat er empfangen?

Er hat bekommen $90 \times 15 = 1350$ Rthlr., also $\frac{1350}{8} = 168\frac{3}{4}$ Rthlr. baar, und an Ellenwaaren $1350 - 168\frac{3}{4} = 1181\frac{1}{4}$ Rthlr.; also

x Ellen — $1181\frac{1}{4}$ Rthlr.
1 — 72 Gr.
36 — 1 Elle

x = $2362\frac{1}{2}$ Elle.

§. 98.

§. 98.
Wechselrechnung.

Eine Geldsorte ist besser als eine andere, entweder, weil sie mehr Gold oder Silber enthält, oder weil sie grade mehr gesucht wird. Der Unterschied nun wird nach Procenten bestimmt, und das Verhältniß auswärtiger Münzsorten zu den einheimischen heißt der **Wechselcours.** Statt des baaren Geldes pflegt man im Handel schriftliche Anweisungen zu geben, die dem Besitzer so gut als baares Geld sind, und **Wechsel** genannt werden. Ein Beyspiel wird hievon wenigstens einen Begriff geben können. A in Hamburg kauft von B in Amsterdam für 6000 Gulden Kaffe; C in Hamburg hat von D in Amsterdam 8000 Gulden zu fodern; A kauft nun von C 6000 Gulden, und dieser stellt ihm nun, nachdem er den Werth, die Valute, dafür empfangen hat, eine Anweisung an D in Amsterdam aus (er giebt ihm einen Wechsel an D, oder er trassirt auf D). A schickt (remittirt) nun diesen Wechsel an B, und dieser legt ihn D zur Annahme vor (er präsentirt ihn), welcher ihn entweder für gültig anerkennt (acceptirt), und den Werth auszahlt (honorirt), und dieses sogleich (auf Sicht, à Vista), oder einige Tage nach Sicht, oder auf einen bestimmten Termin (Uso); oder er protestirt gegen den Wechsel. A ist nun der **Remittent**, C der **Trassant**, B der **Präsentant**, und D der **Acceptant.** Wäre B einem andern schuldig, so könnte er auch mit dem Wechsel zahlen. Sind wenig Trassanten aber viele Remittenten; so sind die Wechselbriefe theuer: im im umgekehrten Falle sind sie wohlfeil. Die Unkosten bey den Wechseln nehmen entweder mit der Wechselsumme zu und ab, sie sind ihr proportionirt, wie Provision, Courtagie, Interesse, u. s. w.; oder sie sind überhaupt berechnet, und unproportionirt.

Einige Beyspiele.

1) Ein Kaufmann muß für eine Schiffsladung Korn 7984 Gulden 27 Gros. 2 Schill. Polnisch nach Danzig zahlen; wieviel muß er in Bremer Gelde entrichten, wenn 1 Grosch. Poln. = 4 Schw. Brem. ist?

x Rtl. Brem. G.	—	$227547\frac{2}{3}$ Gros. Pol.
1	—	4 Sch. Brem. G.
5	—	1 Gr.
72	—	1 Rthlr.

x = 2661 Rtlr. 46 Gr. $0\frac{2}{3}$ Schw.

2) Wieviel betragen 300 Rthlr. in $\frac{2}{3}$ St. nach Hamb. Cour., wenn ein $\frac{2}{3}$ St. = 31 Schill. Hamb. Cour. ist?

x Rthlr.	—	300 Rthlr. in $\frac{2}{3}$ St.
$\frac{2}{3}$	—	31 Schill. Hamb. Cour.
16	—	1 Mark.

x = $871\frac{7}{8}$ Mark Hamb. Cour.

3) Wenn der Dukate in Hamburg 7 Mark 2 Schill. Cour., und das Agio von Bo. gegen Cour. $18\frac{3}{4}$ pC. ist, wieviel Thaler Bo. erhält man für 723 Dukaten?

x Rthlr. Bo.	—	723 Dukat
1	—	$7\frac{1}{8}$ Mark Hamb. Cour.
$118\frac{3}{4}$	—	100 Mark Bo.
3	—	1 Rthlr.

x = 1446 Rthlr. Bo.

4) Ein Kaufmann in Hamburg läßt in Leipzig 1000 Louisd'or à 5 Rthlr. verkaufen, und bekommt die Valute zu 35 pC. in Bo.; wegen der Spesen ist in Leipzig 1 pC. gerechnet; wie hoch kommen die Louisd'or in Mark Bo.?

x Mark Bo.	—	1000 Louisd'or
1	—	5 Rthlr. in Leipzig
100	—	101 wegen Spesen
135	—	100 Rthlr. Bo.
1	—	3 Mark Bo.

$x = 11222\frac{2}{9}$ Mark Bo.

5) Es ist ein Kaufmann in Danzig 1899 Guld. 10 Grosch. Poln. schuldig, er will durch Wechsel nach Hamburg à Grosch. $92\frac{1}{2}$ für 1 Rthlr. übermachen; wieviel Thaler muß er zahlen?

x Rthlr.	—	$1899\frac{1}{3}$ Guld. Poln.
1	—	30 Grosch. Poln.
$92\frac{1}{2}$	—	1 Rthlr.

$x = 616$ Rthlr.

6) Wieviel Berliner Thaler machen 250 Guld. Amst., wenn 33 Stüber = 2 Mark, und 300 Mark = $152\frac{1}{2}$ Rthlr. sind?

x Rthlr.	—	250 Guld. Amst.
1	—	20 Stüber
33	—	2 Mark
300	—	$152\frac{1}{2}$ Rthlr.

$x = 154\frac{4}{99}$ Rthlr.

7) Wenn 3 livres = $27\frac{1}{2}$ Schill. Bo., und 300 Mark Bo. = $152\frac{1}{2}$ Rthlr. ist; was betragen 2800 livres in Thalern?

x Rthlr. — 2800 Liv.
3 — $27\frac{1}{2}$ Schill. Bo.
16 — 1 Mark Bo.
300 — $152\frac{1}{2}$ Rthlr.

x = 815 Rthlr. 1 gGr. 10 Pf.

8) Ein Dukate gilt in Berlin $2\frac{1}{2}$ Rthlr. Bo.; das Agio ist $31\frac{1}{4}$ pC., der Louisd'or gilt $5\frac{1}{4}$ Rthlr. in Cour.; wie stehen 100 Rthlr. in Dukaten gegen Thaler in Louisd'or?

x Rtr. in Luisd. — 100 Rtr. in Duk.
11 — 4 Dukat
4 — 9 Rtr. Bo.
100 — $131\frac{1}{4}$ Rthlr. Cour.
21 — 4 Louisd.
1 — 5 Rthlr. in Louisd.

x = $102\frac{3}{11}$ Rthlr. in Louisd.

9) Ein Wechsel von 2000 Rthlr., welcher den 28. Febr. fällig ist, wird à $2\frac{1}{2}$ pC. den 16. Jenner discontirt; was beträgt das Disconto, wenn jeder Monat zu 30 Tagen, und das Jahr zu 360 Tagen gerechnet wird?

x Rtlr. Disc. — $2\frac{1}{2}$ pC.
360 Tage — 42 Tage
100 Rtlr. — 2000 Rthlr.

x = 2 Rthlr. 22 gGr.

10) Ein Wechsel von 200 Rthlr., fällig den 28. Jun., wird den 4. May discontirt à 6 pC., wieviel beträgt das Disconto?

x Rtlr. Disc. — 6 pC.
360 Tage — 54 Tage
100 Rtlr. — 200 Rthlr.

x = $1\frac{1}{5}$ Rthlr.

Siebenzehntes Kapittel.

Weitere Ausführung der Lehre von den Gleichungen.

§. 99.

Das wichtigste und zugleich das schwerste in dieser Lehre ist, die Gleichung §. 48 selbst in der Aufgabe zu finden, und geschickt aufzusetzen. Es lassen sich hierüber keine Regeln geben, weil die Aufgaben so unendlich verschieden seyn können. Weil sich aber nun Verstand und Beurtheilungskraft immer thätig zeigen müssen, so werden auch beide Vermögen hier grade am meisten geschärft, und endlich erwirbt man sich durch Uebung eine Fertigkeit in dem, was anfangs viele Schwierigkeiten verursachte. Das Allgemeine, was man über die Auffindung einer Gleichung sagen kann, ist ungefähr folgendes.

a) Vor allen Dingen muß man in einer Aufgabe das Gegebene von dem, was gesucht werden soll, das heißt, das bekannte von dem unbekannten unterscheiden; das letzte giebt entweder die Aufgabe unmittelbar an die Hand, oder man findet es leicht, wenn man überlegt, was man wissen müßte, um die Frage beantworten zu können. Das unbekannte drückt man nun durch x aus.

b) Sind zwey unbekannte Dinge in einer Aufgabe, so kann das eine durch das andere gegeben seyn, wenn die Summe oder die Differenz beider unbekannten Dinge gegeben ist; z. B. die Summe beider unbekannten Dinge wäre $= 60$; drückt man nun das eine von diesen durch x aus, so wird das andere $= 60 - x$ seyn müssen; oder es sey die Differenz beider unbekannten Größen gegeben $= 20$, und die eine sey x, so wird die andere $= x + 20$ seyn müssen.

c) Die unbekannte Größe x wird als bekannt angesehn, und man sucht aus der Aufgabe zwey Ausdrücke, welche einander gleich sind, vermöge der Bedingungen, welche die Aufgabe enthält. Ein oder auch beide Ausdrücke werden aus einer Verbindung von Größen bestehen, unter welchen das unbekannte x sich findet.

d) Darauf wird x nach §. 51 von allen bekannten Größen befreit, und die bekannten Größen auf der einen Seite des Gleichheitszeichen zusammengenommen, nach ihren verschiedenen Verbindungen in eine Summe vereinigt, geben den Werth von x.

Anmerkung 1. Wenn in mehrern Gliedern auf einer Seite des Gleichheitszeichen sich x befindet, so kann man die Factoren von x in Klammern schließen, und x davor setzen, z. B. $3x - \frac{2}{3}x + 9x$ kann man auch so schreiben: $(3 - \frac{2}{3} + 9)\,x$. Hiebey muß man sich merken, daß, wenn vor x kein Factor steht, es allemal den Factor 1 habe, so wie jede Zahl zum Factor und Divisor 1 hat. Man kann also $x - \frac{3}{4}x$ auch so schreiben: $(1 - \frac{3}{4})\,x$ und dies ist $\frac{1}{4}x$.

Anmerkung 2. Wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen Glieder sind, welche x enthalten, wie in §. 51 Anmerk.; so muß man darnach sehen, daß, wenn das eine x zu dem andern mit Beobachtung der Regeln von §. 51 herübergebracht wird, das x, vor welchem (—) steht, einen kleinern Factor habe, als das, vor welchen (+) steht; z. B

1) $16 - 3x = 6x - 2$; also $16 + 2 = 6x + 3x$; $18 = 9x$, und $x = 2$.

2) $21x - 8 = 16 + 12x$; $21x - 12x = 16 + 8$; $9x = 24$, $x = 2\frac{2}{3}$.

Anmerkung 3. Es ist erstlich $16x - (2x + 4) = 16x - 2x - 4$; und dann $3x - (x - 3) = 3x - x + 3$; oder, wenn vor einer Größe, in Klammern eingeschlossen, (—) steht; so müssen die Zeichen der in Klammern eingeschlossenen Glieder, wenn man die Klammern wegläßt, in ihre entgegengesetzte §. 51 verwandelt werden. Diese eingeschlossene Größe wird als ein einzelnes Glied angesehn, welches abgezogen werden soll. In den gebrauchten Beyspielen wird im ersten Falle nicht nur 2x, sondern auch 4 abzuziehen seyn, daher bekommt 4, wenn die Klammern weggelassen werden, das Zeichen (—); im zweiten Fall aber soll nicht x, sondern der Unterschied zwischen x und 3 abgezogen werden; zieht man also x ab, so hat man 3 zuviel abgezogen, welche also zum Rest noch addirt werden müssen, daher bekommt 3 dann das Zeichen (+), wenn die Klammern weggelassen werden. Aus eben dem Grunde ist der Ausdruck $-\frac{3x-5}{4} = -\frac{3x}{4} + \frac{5}{4}$ und $-\frac{3x+5}{4} = -\frac{3x}{4} - \frac{5}{4}$.

Anmerkung 4. Wenn x auf eine Seite des Gleichheitszeichen gebracht ist, und man findet, daß die Zahlen, vor welchen ein (—) steht, zusammengenommen größer sind, als die, vor welchen ein (+) steht: so ist, wenn man sonst richtig gerechnet hat, die Aufgabe ungereimt gewesen, (§. 51 Anmerk.) außer in dem Fall, wenn auf der andern Seite die Glieder, welche x enthalten, und vor welchen (—) steht zusammengenommen einen größern Factor von x ausmachen, als der Factor von x, welcher aus den Gliedern zusammennommen, welche x enthalten, und vor welchen (+) steht, entstanden ist; in dem letzten Fall darf man nur die Zeichen aller Glieder in ihre entgegengesetzten verwandeln, z. B.

$4x - 16x = 50 - 200$ ist
$16x - 4x = 200 - 50.$

Dieses wird man sich leicht aus §. 51, 1. 2. erklären können.

§. 100.

Einige Aufgaben, wodurch die §. 49 gegebenen Formeln erläutert werden.

1) Wenn jemand $\frac{2}{3}$ Rthlr. ausgiebt, und $\frac{3}{5}$ Rthlr. überbehält, wieviel hat er gehabt?

Er hat x Rthlr. gehabt §. 99 a; von diesen giebt er $\frac{2}{3}$ aus, also $x - \frac{2}{3}$; er behält $\frac{3}{5}$ Rthlr. über, daher muß $\frac{3}{5}$ gleich dem vorigen seyn; man hat also die Gleichung

$x - \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$; §. 51. 1
$x = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15} = 1$ Rth. 19 G. 1 S.

2) Eine Zahl zu finden, die, wenn man $\frac{1}{7}$ dazu nimmt, $= \frac{1}{2}$ ist.

$x + \frac{1}{7} = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{7}$; §. 51. 2, $x = \frac{5}{14}$.

3) Es hat jemand so viel Thaler in der Tasche, daß er, wenn er sie mit 3 multiplicirt, und dazu noch 7 addirt, 100 hat; wieviel Thaler hat er?

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist nun

$3x + 7 = 100$, nach §. 51, 2 $3x = 100 - 7$
$x = \frac{100 - 7}{3} = \frac{93}{3} = 31.$

Hätte er 100 Rthlr., wenn er die Anzahl Thaler mit 4 multiplicirte, und vom Product 9 abzöge, so wäre

$4x - 9 = 100$; $4x = 100 + 9$; $x = \frac{100 + 9}{4}$
$= \frac{109}{4} = 27\frac{1}{4}$ Rthlr.

4) Es hatte jemand 4000 Steine überbehalten, nachdem er von den Steinen, welche er gehabt, $\frac{1}{7}$

und 100 dazu vermauert hatte; wieviel Steine hat er also gehabt?

Die Anzahl Steine, welche er anfänglich hatte, sey $= x$; von diesen hat er nun $\frac{1}{7}$ vermauert, und noch 100 dazu, es bleiben also $x - \frac{1}{7}x - 100$; dieses muß nun der Anzahl von Steinen gleich seyn, die er überbehalten hat, also

$$x - \frac{1}{7}x - 100 = 4000$$

$$(1 - \frac{1}{7})x - 100 = 4000$$

$$\frac{6x}{7} - 100 = 4000 \text{ §. 51. 5.}$$

$$\frac{6x}{7} = 4000 + 100 = 4100$$

$$x = \frac{4100 \times 7}{6} = \frac{28700}{6} = 4783\frac{1}{3}$$

Hätte er aber $\frac{1}{3}$ Steine weniger 500 vermauert, und hätte 6000 überbehalten, so wäre

$$x - (\frac{1}{3}x - 500) = 6000$$

$$x - \frac{1}{3}x + 500 = 6000 \text{ §. 99, Anmerk. 1 und 3.}$$

$$\frac{2}{3}x + 500 = 6000$$

$$\frac{2}{3}x = 6000 - 500 = 5500$$

$$x = \frac{5500 \times 3}{2} = 8250$$

5) Es wurden Äpfel unter Kinder vertheilt, jedes erhielt 6 Stück; nun wurden noch 363 Stück unter sie gleich vertheilt, so daß jedes Kind überhaupt 39 Stück bekam; wieviel Kinder waren da? Die Anzahl der Kinder sey x; von 363 Stück bekam also ein jedes $\frac{363}{x}$, und dazu noch 6 Stück, also

$$\frac{363}{x} + 6 = 39$$

$$363 + 6x = 39x \text{ §. 51. 4.}$$

$$363 = 39x - 6x = 33x \text{ §. 99 Anm. 2 u. 1}$$

$$x = \frac{363}{33} = 11 \text{ Kinder.}$$

6)

6) Es ist jemand einem andern 56 Rthlr. schuldig, diese kann er bezahlen, wenn er von dem, was er grade bekommen hat, $\frac{1}{6}$ nimmt, und von diesem noch 3 Rthr. abzieht; wieviel hat er bekommen? Gesetzt er hätte x bekommen, der $\frac{5}{6}$ Theil davon wäre also $\frac{5}{6}x$; von diesem nimmt er noch 3 Rthlr. ab, also $\frac{5}{6}x - 3$; und weil er hiemit seine Schulden bezahlen kann, so muß dieses auch gleich seinen Schulden seyn; also

$$\frac{5}{6}x - 3 = 56$$
$$\frac{5}{6}x = 56 + 3 = 59$$
$$x = \frac{59 \times 6}{5} = \frac{354}{5} = 70\tfrac{4}{5} \text{ Rthlr.}$$

7) 1066 Rthlr. wurden so unter einigen Personen vertheilt, daß eine jede nur halb so viel bekam, als sie hätte bekommen müssen, wenn die Summe in so viele Theile getheilt wäre, als Personen da waren; ausserdem erhält noch eine jede 9 Rthlr. überher, und hat nun überhaupt 50 Rthlr.; wieviel Personen waren da?

Die Anzahl Personen sey x, wenn diese sich in die Summe getheilt hätten, so würde eine jede $\frac{1066}{x}$ bekommen haben, sie bekommt aber nur halb so viel, also $\frac{1066}{2x}$; dazu noch 9 Rthlr., also

$$\frac{1066}{2x} + 9 = 50$$
$$1066 + 18x = 100x$$
$$1066 = 100x - 18x = 82x$$
$$x = \frac{1066}{82} = 13 \text{ Personen.}$$

Man hätte auch gleich $\frac{533}{x}$ statt $\frac{1066}{2x}$ setzen können.

Anmerkung. Um zu erfahreen, ob man richtig gerechnet habe, darf man nur den gefundenen Werth von x statt x in die Gleichung setzen, und nun sehen, ob die beiden Hälften der Gleichung wirklich gleich sind.

§. 101.

Noch einige Aufgaben, wobey ein Anfänger sich die Regeln der Auflösung bekannt und geläufig machen kann.

1) Es hat jemand einige Thaler eingenommen, darauf noch 60 Rthlr, seine Ausgabe ist 75 Rtl. gewesen; wenn er noch 25 Rthlr. eingenommen hätte, so würde sein Vermögen jetzt 45 Rthlr. seyn; wieviel Thaler nahm er zuerst ein?

Die Gleichung ist nach den in der Aufgabe vorkommenden Bedingungen, wenn die Anzahl der zuerst eingenommenen Thaler x ist

$x + 60 - 75 + 25 = 45$

$x = 45 - 60 + 75 - 25$ §. 51. 1

$x = 120 - 85 = 35.$

2) Von einer Waare hat man einen Theil verkauft, und 13 Zent. weniger überbehalten, als man verkauft hat; die ganze Waare hielt an Gewicht 50 Zent.; wieviel hat man verkauft?

Man hat verkauft x Zent., überbehalten $x - 13$; dieser Rest zu dem verkauften addirt muß gleich seyn dem ganzen Gewicht der Waare; also

$x + x - 13 = 50$

$2x - 13 = 50$

$2x = 50 + 13 = 63$

$x = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2}$ Zent.

3) In 24000 Rthlr. sollen sich 4 Personen A, B, C, D so theilen, daß B 150 Rthlr. mehr als A, C 330 Rthlr. mehr als B, und D 1200 mehr als C bekommt; wieviel erhält ein jeder?

Die

Die Frage ließe sich leicht beantworten, wenn man wüßte, wieviel A bekäme. Der Antheil von A soll nun x seyn; also erhält

A x
B $x + 150$
C $x + 150 + 330$
D $x + 150 + 330 + 1200$

also $4x + 450 + 660 + 1200 = 24000$

denn die Theile zusammengenommen müssen dem Ganzen gleich seyn; hieraus folgt

$$4x = 24000 - 450 - 660 - 1200 = 21690$$
$$x = \frac{21690}{4} = 5422\tfrac{1}{2}$$

Nun läßt sich leicht finden, was B, C und D bekommen muß.

4) Aus einem Fasse Reiß wurden eine Anzahl Pfunde abgewogen, und es blieben noch 120 Pf. in demselben. Aus einem andern Fasse, worin 250 Pf. waren, wurd nochmal so viel ausgewogen, als aus dem ersten, und es blieben so viel Pfunde darin, als in dem ersten Fasse anfänglich waren; wieviel Pfunde sind aus dem ersten Fasse ausgewogen?

Ist aus dem ersten Fasse x Pf. ausgewogen, so muß sein Inhalt $x + 120$ gewesen seyn. Aus dem andern Fasse, worin 250 Pf. waren, wurde nochmal so viel ausgewogen, also $2x$, folglich blieben im zweiten Fasse $250 - 2x$, soviel als im ersten anfangs waren, daher

$$x + 120 = 250 - 2x$$
$$3x = 250 - 120 = 130$$
$$x = \frac{130}{3} = 43\tfrac{1}{3} \text{ Pf.}$$

5) Man hat ein Faß von 25 Eimern, welches mit

mit zweyerley Wein soll gefüllt werden, von welchen der Eimer der geringern Sorte 25 Rthlr., von der bessern 48 Rthlr. kostet; wieviel muß von jedem genommen werden, daß der vermischte Eimer 30 Rthlr. kostet?

Da ein Faß von 25 Eimern soll gefüllt werden, so wird man, wenn von der bessern Sorte x Eimer genommen worden, von der geringern 25 — x nehmen müssen §. 99. b. Nun kostet der Eimer von der bessern Sorte 48 Rtl., also x Eimer kosten 48 x; und die Anzahl Eimer von der geringeren Sorte kosten (25 — x) 25. In das Faß käme also ein Gemisch, welches 48x + (25 — x) 25 Thaler kostete.

Da das Gemisch 25 Eimer ist, so würde der Preis für einen Eimer $\frac{48x + (25 - x)\,25}{25}$ oder $\frac{48x + 625 - 25x}{25}$ oder $\frac{23x + 625}{25}$ seyn, und dieser ist nach der Aufgabe 30 Rthlr.; folglich

$$\frac{23x + 625}{25} = 30$$

$$23x + 625 = 30 \times 25 = 750$$

$$23x = 750 - 625 = 65$$

$x = \frac{65}{23} = 2\frac{19}{23}$ Eimer von der bessern Sorte also von der schlechtern $25 - 2\frac{19}{23} = 22\frac{4}{23}$.

6) Es kaufte jemand Tuch, und zwar 3 Ellen für 8 Rthlr.; verkaufte wieder 2 Ellen für 7 Rthlr.; bey diesem Handel gewann er 100 Rthlr.; wieviel Tuch hatte er eingekauft?

Die Anzahl der eingekauften Ellen sey x; wenn nun 3 Ellen 8 Thaler kosten, so kommen x Ellen $\frac{8x}{3}$ Rthlr. zu stehn; wenn man ferner 2 Ellen für 7 Rthlr. verkauft, so bekommt man für x Ellen $\frac{7}{2}x$ Rthlr.;

Rthlr.; wenn nun von dem Verkaufspreis 100 Rthlr. abgezogen werden, so ist der Rest gleich dem Einkaufspreis; folglich

$$\frac{8x}{3} = \frac{7x}{2} - 100 \text{ oder}$$

$$100 = \frac{7x}{3} - \frac{8x}{2} = (\tfrac{7}{2} - \tfrac{8}{3})\,x = \frac{5x}{6}$$

$$x = \frac{100 \times 6}{5} = 120 \text{ Ellen.}$$

§. 102.

Zum Schlusse will ich hier noch ein paar Aufgaben allgemein auflösen, die im gemeinen Leben nicht selten vorkommen.

Man hat zwey Materien, ein gewisses Maaß von der theurern kostet a, dasselbe von der wohlfeilern kostet b, aus beiden will man ein Gemisch machen, dessen Maaß d ist und c kosten soll, ein Preis, der zwischen a und b fällt; wieviel von jeder Materie muß man dazu nehmen?

Gesetzt, von der theurern nähme man x, so müßte man von der wohlfeilern d — x nehmen; der Werth des ersten Theils würde ax, der des zweiten Theils (d — x) b seyn, beides zusammengenommen aber gleich cd, also

$$ax + (d - x)\,b = cd$$

$$ax + bd - xb = cd$$

$$ax - xb = cd - bd$$

$$(a - b)\,x = cd - bd$$

$$x = \frac{cd - bd}{a - b} = \frac{(c - b)\,d}{a - b}$$

z. B. Man hat zwey Weinsorten, das Maaß der bessern kostet 18 Gr., das der schlechtern 12 Gr.; die Mischung von beiden soll 14 Gr. kosten,

und

und 48 Maaß halten; so ist $a = 18$, $b = 12$, $c = 14$, $d = 48$, also $\frac{(14-12)\,48}{18-12} = \frac{2 \times 48}{6} = \frac{96}{6} =$ 16 Maaß, also von der schlechtern Sorte muß man $48 - 16 = 32$ Maaß nehmen.

Ferner ein Silberarbeiter hat 14löthiges und 9löthiges Silber, aus beiden will er eine Masse machen 30 Loth schwer, die 12löthig seyn soll; wieviel muß er von jeder Silbersorte nehmen? Hier ist $a = 14$, $b = 9$, $c = 13$, $d = 30$, also

$\frac{(12-9)\,30}{14-9} = \frac{3 \times 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$ Loth

und von der schlechtern $30 - 18 = 12$ Loth.

Anmerkung 1. Sehr oft ist das Maaß der Mischung in den Aufgaben nicht enthalten, und dann läßt man in der Formel d weg.

Anmerkung 2. Aus der gegebenen Formel kann man noch die Auflösung von vier andern Aufgaben finden, wenn man x als bekannt, und d, a, b, c nocheinander als unbekannt ansieht.

1) Wenn die bessere Materie a, die schlechtere b kostet, und die Mischung c; von der bessern Materie hat man x genommen, wie groß wird das Maaß der Mischung seyn?

$$d = \frac{x(a-b)}{c-b}$$

2) Wenn man von der besseren Materie x genommen, die schlechtere b kostet, die Mischung aus beiden c, und ihr Maaß d ist; wie theuer war die bessere Sorte?

$$a = \frac{cd - bd + xb}{x}$$

3) Wenn die Bedingungen dieselben sind, wie theuer ist die schlechtere Sorte?

$$b = \frac{xa - cd}{x - d}$$

4) Aus zwey Materien, von welchen die bessere a, die schlechtere b kostet, hat man eine Mischung, deren

Maaß d ist, gemacht, indem man von der bessern x nahm; wie theuer kann man die Mischung geben?

$$c = \frac{xa - xb + bd}{d}$$

Man kann hier die gegebenen Beyspiele in Zahlen anwenden, um sich diese Formeln zu erläutern. Uebrigens merke man sich, daß x und d einerley Einheiten von Maaß enthalten müssen.

Wenn man ein Kapital a auf b pC. ausleiht, so findet man die jährliche Zinse aus $100 : b = a : x$, und $x = \frac{ab}{100}$. In n Jahren würden diese Zinsen n mal größer seyn, also $\frac{n\,ab}{100}$; dieses zu a addirt giebt S oder wie groß das Kapital durch die hinzugeschlagenen Zinsen in n Jahren geworden ist; man hat also

$$S = a + \frac{n\,ab}{100} = \frac{a\,100}{100} + \frac{n\,ab}{100} = \frac{100\,a + n\,ab}{100}$$

z. B. Wenn man ein Kapital 6500 zu 5 pC. auf 10 Jahr ausgeliehen hat, wie groß ist es durch die Zinsen geworden?

Hier ist $a = 6500$, $b = 5$, $n = 10$, also

$$S = \frac{120 \times 6500 + 10 \times 6500 \times 5}{100} = \frac{975000}{100} = 9750$$

Anmerkung 1. Aus der gegebenen allgemeinen Formel kann man, wenn S als bekannt, a, b, n aber nach und nach als unbekannt gesetzt wird, die Auflösung von drey andern Aufgaben herleiten.

1) Ein Kapitel ist zu b pC. auf n Jahr ausgeliehen, und durch die Zinsen S geworden, wie groß war es anfangs? Oder, wie groß muß ein Kapital seyn, welches zu b pC. ausgeliehen in n Jahren S werden soll?

$$a = \frac{100\,S}{100 + nb}$$

2) Zu wieviel pC. müßte man ein Kapital a ausleihen, wenn es in n Jahren S werden sollte?

$$b = \frac{(S - a)\,100}{na}$$

3)

3) Wie lange Jahre hat ein Kapital a auf Zinsen gestanden, welches zu b pC. ausgeliehen mit den Zinsen S geworden ist

$$n = \frac{(S - a)\,100}{ba}$$

Anmerkung 2. Wenn ein Kapital a mit den Zinsen in n Jahren S geworden ist, so giebt a von S abgezogen den Zuwachs, um welchen a größer geworden ist. Wenn man nun den Werth von a aus der vorhergehenden Anmerkung nimmt, so ist der Zuwachs

$$S - a \text{ oder } S - \frac{100\,S}{100 + nb} = \frac{S\,(100 + nb)}{100 + nb} - \frac{100\,S}{100 + nb}$$

$$= \frac{S\,(100 + nb) - 100\,S}{100 + nb} = \frac{100\,S + nb\,S - 100\,S}{100 + nb} = \frac{nb\,S}{100 + nb}$$

Wenn also jemand ein Kapital S in n Jahren zu bezahlen hätte, und er könnte mit b pC. Rabat sogleich bezahlen, so würde der Rabat betragen $\frac{nb\,S}{100 + nb}$; und das, was er so gleich zu bezahlen hätte, würde seyn $S - \frac{nb\,S}{100 + nb}$ oder $\frac{100\,S}{100 + nb}$.

Anmerkung 3. In den Formeln sind die Zinsen nach Jahren berechnet, will man sie nach Monaten berechnen, wie das im gemeinen Leben oft geschieht: so kann man dieselben Formeln brauchen, nur muß man in denselben 1200 statt 100 setzen, und n bedeutet dann die Zahl der Monate.

---

pels; 1 Schepel oder Aggelen hat 4 Vierdevat oder 32 Kop. Ein Sack hält 4087 Pariser Cubic-Zoll, und 36 Sack gehen auf eine Last. Die große Kalk-Tonne hält 90 Mingelen, und ist 5417 Pariser Cubic-Zoll groß.

2) Von flüssigen Sachen.

Ein Aam hat 4 Ankers; 1 Anker 2 Stekan; 1 Stekan $2\frac{5}{8}$ Viertels, und ist 963 Pariser Cubic-Zoll groß; 1 Viertel hat $6\frac{2}{21}$ Mingelen; 1 Stoop hat 2 Mingelen und ist 120 Pariser Cubic-Zoll groß. 1 Mingele hat 2 Pinten, und hält 60 Pariser Cubic-Zoll; 1 Pinte 4 Müsjes. 1 Oxhooft wird zu 180 Mingelen gerechnet.

3) Längenmaaße.

Ein Amsterdammer Fuß hat 11 Däume oder 44 Quartir und ist $125\frac{1}{2}$ Pariser Linien. 6 Oldenburger Ellen machen $5\frac{13}{478}$ Amsterdammer Ellen. Die Amsterdammer Elle hat 306 Pariser Linien, die Vlaamsche Elle 315 Pariser Linien.

2) Bremen.

Geld.

Ein Reichsthaler hält $2\frac{1}{4}$ Mark; 1 Mark $2\frac{2}{3}$ Kopfstücke; 1 Kopfstück $1\frac{1}{8}$ Dütgen; 1 Dütgen 3 Schillinge; 1 Schilling $1\frac{1}{2}$ Groten; 1 Grote 5 Schwaren. Bremer Grote sind dem Golde gleich.

Gewicht.

Ein Schiffspfund hält $2\frac{1}{2}$ Zentner; 1 Zentner $8\frac{2}{7}$ Liespfund oder 116 Pfund; 1 Liespfund 14 Pfund. Ein Pfund hält 10380 Asen nach Holländischem Troys-Gewichte, und 112 Pfund in Oldenburg sind 111 Pfund in Bremen.

Maaß.