Anweisung zum Rechnen für Bürger- und Land-Schulen

König, Georg Ludwig

Oldenburg, 1800

VD18 13391704

Neuntes Kapittel. Erste Gründe der Lehre von den Gleichungen.

urn:nbn:de:gbv:45:1-7792

Neuntes Kapittel.

Erste Gründe der Lehre von den Gleichungen.

§. 46.

Eine Größe ist sich selbst gleich, und **Ein Ganzes ist seinen Theilen zusammengenommen gleich,** sind Sätze, die man eben so wenig beweisen kann, als man eines Beweises dafür bedarf. Auch wird folgendes begreiflich seyn. **Eine jede Größe läßt sich auf mannigfaltige Arten in Theile zerlegen, und die Theile, worin eine Größe auf eine Art zerlegt ist, sind zusammen den gesammten Theilen gleich, worin die Größe auf eine andere Art zerlegt ist,** z. B. $11 = 11$, und $6+5 = 4+7$. Ferner da $6 = 8-2$; $4 = 6-2$; so ist auch, dies statt 6 nnd 4 gesetzt, $8-2+5 = 6-2+7$. Nun ist $8 = 2\times 4$, und $6 = 3\times 2$; also auch $2\times 4 - 2+5 = 3\times 2 - 2+7$. Ferner ist $2\times 4 - 2 = (4-1)2$, und $3\times 2 - 2 = (3-1)2$, also ist auch $(4-1)2+5 = (3-1)2+7$. Da auch $5 = \frac{12-2}{2}$ und $7 = \frac{18-4}{2}$, so ist auch $(4-1)2+\frac{12-2}{2} = (3-1)2+\frac{18-4}{2}$. Kurz, die Theile, worin eine Größe zerlegt ist, können durch alle Zeichen der vier einfachen Rechnungsarten unter sich verbunden seyn, und durch die Anwendung derselben lassen sich die Theile wieder auf ein Gan-

Ganzes zurückführen, z. B. $(4-1)\,2 = 3 \times 2 = 6$; $\frac{12-2}{2} = \frac{10}{2} = 5$, und $6 + 5 = 11$; eben so $(3-1)\,2 = 2 \times 2 = 4$; und $\frac{18-4}{2} = \frac{14}{2} = 7$, und $4 + 7 = 11$, also $11 = 11$.

§. 47.

Solche Zahlen, vor welchen ein (—) steht, kann man als solche betrachten, die von andern, vor welchen ein (+) steht, abgezogen werden müssen. Da man nun alle mit (+) bezeichnete Zahlen zusammenaddiren, und von dieser Summe die Summe der Zahlen, vor welchen ein (—) steht, abziehen kann: so ist die Ordnung, worin die mit (+) und (—) bezeichneten Zahlen stehen, gleichgültig, und es ist einerley, ob man $6 - 2 + 4$, oder $4 - 2 + 6$, oder $4 + 6 - 2$ schreibt. Das Zeichen (+) wird vor der ersten Zahl linker Hand gewöhnlich ausgelassen, und statt $+ 8 - 2$ schreibt man $8 - 2$.

§. 48.

Einen doppelten Ausdruck derselben Größe nennt man eine **Gleichung**. Das, was auf der einen oder der andern Seite des Gleichheitszeichens (=) steht, heißt die **Hälfte der Gleichung**; und die Zahlen, vor welchen entweder (+) oder (—) steht, heißen **Glieder der Gleichung**. Unter diesen Gliedern können sich ein oder mehrere befinden, welche entweder ganz, oder zum Theil unbekannt sind. Das Unbekannte wird mit x bezeichnet. Kommt in einer Gleichung dieses x mit sich selbst multiplicirt vor, also xx; so nennt man sie eine Gleichung vom zweiten Grade; befindet sich in einer xxx; so nennt man sie eine Gleichung vom dritten Grade u. s. w. In dem folgenden wird nur von Gleichungen des ersten Grades die Rede seyn.

Anmerkung. Wenn man Zahlen allgemein durch Buchstaben ausdruckt, so setzt man die Factoren eines Products ohne Multiplicationszeichen neben einander; so bedeutet ab ein Product aus den beiden Factoren a und b; xx ein Product aus den beiden gleichen Factoren x und x; abc ein Product, aus den drey Factoren a und b und c; xxx ein Product aus den drey gleichen Factoren x und x und x. Und $\frac{a}{b}$ drückt aus, eine Zahl a, durch b dividirt; $\frac{cm}{d}$ ein Product aus den Factoren c und m durch d dividirt; man könnte dieses auch a : b; cm : d schreiben.

§. 49.

Wenn a, b, c jede bekannte, einfache oder zusammengesetzte Zahl bedeuten; so kann das unbekannte x mit den bekannten Zahlen auf folgende mögliche Arten verbunden seyn.

1) $x \pm a = c$. 4) $\frac{b}{x} \pm a = c$.

2) $xb \pm a = c$. 5) $\frac{dx}{b} \pm a = c$.

3) $\frac{x}{b} \pm a = c$. 6) $\frac{b}{dx} \pm a = c$.

Das Zeichen ($\pm$) bedeutet einen doppelten Fall, man kann entweder (+) oder (—) annehmen. Könnte man nun eine Gleichung nach und nach so verändern, daß das unbekannte x auf der einen Seite des Gleichheitszeichen, alles bekannte auf der andern Seite desselben zu stehen käme, ohne daß durch diese Veränderung beide Hälften der Gleichung aufgehört hätten sich gleich zu seyn: so dürfte

dürfte man nur die bekannten Theile, nach ihren Zeichen, womit sie unter sich verbunden sind, auf ein Ganzes zurückbringen, und dies müßte der Werth der unbekannten Größe seyn; z. B. wäre die Gleichung $2x + 4 = 12$ gegeben, und man könnte aus unzubezweifelnden Gründen überzeugt seyn, daß, ohne die Gleichheit beider Hälften aufzuheben, die gegebene Gleichung in $x = \frac{12-4}{2}$ wäre verwandelt worden: so wäre, da $12 - 4 = 8$ ist, und $\frac{8}{2} = 4$, der Werth der unbekannten Größe gefunden, und $x = 4$. Daß dieses so sey, kann man sehen, wenn man 4 statt x in die gegebene Gleichnng setzt, dann ist $2 \times 4 + 4 = 12$, oder da $2 \quad 4 = 8$ ist, $8 + 4 = 12$, oder $12 = 12$.

§. 50.

Es ist aber möglich eine Gleichnng auf diese Weise zu verändern, oder alles bekannte auf eine Seite des Gleichheitszeichen zu bringen, ohne daß die Gleichung aufhört eine Gleichung zu seyn. Die Vorschriften dazu gründen sich auf folgende Sätze, die ein jeder auch ohne Beweis einleuchtend finden wird.

1) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn zu beiden gleiches addirt wird,** z. B.

$$\begin{array}{l} 18 + 4 = 22. \\ \quad +4 \qquad +4. \\ \hline 18 + 4 + 4 = 22 + 4 \text{ oder } 26 = 26. \end{array}$$

2) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn von beiden gleiches abgezogen wird,** z. B.

$$\begin{array}{l} 18 + 4 = 22. \\ \hline \quad -4 \qquad -4. \\ 18 + 4 - 4 = 22 - 4 \text{ oder } 18 = 18. \end{array}$$

3) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn sie mit gleichem multiplicirt werden,** z. B. $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{9}{3} \times 3 = 3 \times 3$ oder $9 = 9$.

4) **Gleiche Größen bleiben sich gleich, wenn sie durch gleiches dividirt werden,** z. B. $4 \times 8 = 32$; $\frac{4 \times 8}{4} = \frac{32}{4}$ oder $8 = 8$.

§. 51.

Da nun die ganz bekannten Glieder der Gleichung mit der unbekannten Größe entweder durch (+) oder (—) verbunden sind, und das bekannte in den zum Theil unbekannten Gliedern entweder als Factor oder als Divisor mit x verbunden ist: so kann man durch Anwendung der im vorigen §. angeführten Grundsätze alles bekannte auf eine Seite des Gleichheitszeichen bringen, ohne daß die Gleichheit darunter leidet, und dadurch den Werth von x finden. Die Buchstaben a, b, c, d, mögen wieder das bedeuten, was sie oben bedeuteten. Man wird nun leicht einsehen können, daß $b - b = 0$ sey, eben so wie $2 - 2 = 0$ ist. Aus jenen Grundsätzen lassen sich unmittelbar folgende drey Sätze herleiten, mit deren Hülfe man jede Gleichung, worin bloß x, aber nicht mit sich selbst multiplicirt (jede einfache Gleichung) und sonst keine unbekannte Größe vorkommt, auflösen, d. h. den Werth von x finden kann. Das entgegengesetzte Zeichen von (+) ist (—), und so umgekehrt.

1) **Alle Glieder, vor welchen ein (+) oder ein (—) steht, lassen sich, ohne daß die Gleichung darunter leidet, mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite**

des

des Gleichheitszeichen bringen. Dies folgt aus §. 50, 1 und 2.

1) $$\begin{array}{l} x - a = c \\ \quad + a \quad + a \\ \hline x = c + a \end{array}$$ also $x - a = c$, und $x = c + a$.

2) $$\begin{array}{l} x + a = c \\ \quad - a - a \\ \hline x = c - a. \end{array}$$ also $x + a = c$, und $x = c - a$.

2) **Der Factor eines Products kann weggeschafft werden, ohne daß die Gleichung darunter leidet, wenn man alle Glieder der Gleichung durch diesen Factor dividirt.** Dies folgt aus §. 50, 4.

2) $xb \pm a = c$

$xb = c \mp a$ nach dem vorigen Satze, und

$\frac{xb}{b} = \frac{c \mp a}{b}$ oder $x = \frac{c \mp a}{b}$, da $\frac{b}{b} = 1$.

3) **Der Divisor eines Gliedes kann weggeschafft werden, ohne daß die Gleichung darunter leidet, wenn man alle Glieder der Gleichung mit diesem Divisor multiplicirt.** Dies folgt aus §. 50, 3.

3) $\frac{x}{b} \pm a = c$

$\frac{x}{b} = c \mp a$ nach 1, und nach 3

$\frac{xb}{b} = (c \mp a)\, b$ oder $x = (c \mp a) b$, da $\frac{b}{b} = 1$.

Die übrigen drey Formen von einfachen Gleichungen §. 49 lassen sich auch leicht mit Hülfe dieser drey Sätze auflösen.

4) $\frac{b}{x} \pm a = c$; $\frac{b}{x} = c \mp a$ nach 1; $b = (c \mp a)\, x$ nach 3; und endlich $\frac{b}{c \mp a} = x$ nach 2.

5) $\frac{dx}{b} \pm a = c$; $\frac{dx}{b} = c \mp a$ nach 1; $dx = (c \mp a)\,b$ nach 3, und endlich $x = \frac{(c \mp a)b}{d}$ nach 2.

6) $\frac{b}{xd} \pm a = c$; $\frac{b}{xd} = c \mp a$ nach 1; $b = (c \mp a)\,xd$ nach 3, und endlich $\frac{b}{(c \mp a)d} = x$ nach 2.

Anmerkung. Wenn sich die unbekannte Größe, oder x, in mehreren Gliedern befindet, entweder in einer oder in beiden Hälften der Gleichung, so werden diese Glieder zusammen auf eine Seite des Gleichheitszeichen gebracht, so daß auf der andern Seite die bekannten Glieder stehen, und die ganz oder zum Theil unbekannten Glieder werden als ein Product ausgedruckt, wovon ein Factor x, der andere eine bekannte zusammengesetzte Größe ist, z. B.

$$\begin{array}{rl} ax + b = c + dx & \\ -b \quad -b & \text{nach 1,} \\ \hline ax = c - b + dx & \\ -dx \quad -dx & \text{nach 1,} \\ \hline ax - dx = c - b & \\ (a-d)\,x = c - b & \\ x = \frac{c-b}{a-d} & \text{nach 2.} \end{array}$$

Man kann in den angeführten Fällen statt a, b, c jede Zahl setzen, die man will, nur muß, wenn man + a, + b, + c annimmt, a allezeit kleiner als c seyn, sonst würden die Sätze etwas enthalten, was nicht statt finden kann, oder ungereimt wäre. Wenn man z. B. setzte $x + 2 = 1$, so sieht man leicht, daß der Satz ungereimt ist; er hieße nämlich in Worten ausgedruckt: man solle eine Zahl finden, die zu 2 addirt 1 gäbe. Von entgegengesetzten Größen ist hier nicht die Rede. In dem Beyspiel der Anmerkung muß, wenn $d < a$ ist, auch $b < c$ seyn, und wenn $d > a$ ist, auch $b > c$ seyn. Hier ist $d < a$, und $b < c$ angenommen.

Zehn-

Zehntes Kapittel.

Von Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

§. 52.

Von zwey Zahlen, die mit einander verglichen, nicht gleich sind, ist die eine allezeit größer als die andere. Aus der Vergleichung der Zahlen unter einander oder mit der Einheit entsteht erst der Begriff von großen und kleinen Zahlen, z. B. 4 ist klein mit 1000 verglichen, aber 4 ist groß mit $\frac{1}{1000}$ verglichen. Die Bestimmung der Größe einer Zahl nach der Größe einer andern nennt man das Verhältniß dieser Zahl zur andern.

§. 53.

Von zwey Zahlen, deren Größe man so bestimmt, kann man sich vorstellen, daß die eine aus der andern entstanden sey, und zwar entweder

a) durch die Addition, die größere aus der kleinern, z. B. 4, 6, also 6 aus 4; denn $6 = 4 + 2$.

b) durch die Subtraction, die kleinere aus der größern, z. B. 4 aus 6, indem $4 = 6 - 2$. Oder

a) durch die Multiplication, die größere aus der kleinern, z. B. 16 aus 2, denn $16 = 2 \times 8$.

b) durch die Division, die kleinere aus der größern, z. B. 2 aus 16, denn $2 = \frac{16}{8}$.