Anweisung zum Rechnen für Bürger- und Land-Schulen

König, Georg Ludwig

Oldenburg, 1800

VD18 13391704

Zehntes Kapittel. Von Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

urn:nbn:de:gbv:45:1-7792

Zehntes Kapittel.

Von Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

§. 52.

Von zwey Zahlen, die mit einander verglichen, nicht gleich sind, ist die eine allezeit größer als die andere. Aus der Vergleichung der Zahlen unter einander oder mit der Einheit entsteht erst der Begriff von großen und kleinen Zahlen, z. B. 4 ist klein mit 1000 verglichen, aber 4 ist groß mit $\frac{1}{1000}$ verglichen. Die Bestimmung der Größe einer Zahl nach der Größe einer andern nennt man das Verhältniß dieser Zahl zur andern.

§. 53.

Von zwey Zahlen, deren Größe man so bestimmt, kann man sich vorstellen, daß die eine aus der andern entstanden sey, und zwar entweder

a) durch die Addition, die größere aus der kleinern, z. B. 4, 6, also 6 aus 4; denn $6 = 4 + 2$.

b) durch die Subtraction, die kleinere aus der größern, z. B. 4 aus 6, indem $4 = 6 - 2$.

Oder

a) durch die Multiplication, die größere aus der kleinern, z. B. 16 aus 2, denn $16 = 2 \times 8$.

b) durch die Division, die kleinere aus der größern, z. B. 2 aus 16, denn $2 = \frac{16}{8}$.

§. 54.

Es giebt also ein doppeltes Verhältniß worin zwey Zahlen mit einander stehen können, indem man sich die Entstehung der einen Zahl aus der andern entweder durch die Addition und Subtraction, oder durch die Multiplication und Division denkt. Das erste wird ein **arithmetisches**, das andere ein **geometrisches** Verhältniß genannt. Die Benennungen sagen im Grunde nichts, sie sollen nur den Unterschied beider Verhältnisse ausdrücken. Bey einem arithmetischen Verhältniß sucht man durch die Subtraction, um **wieviel** die eine Zahl größer als die andere sey; der Unterschied heißt die **Differenz**, und der Ausdruck des Verhältnisses ist 6 — 8 oder 8 — 6; die Differenz ist 2. Bey einem geometrischen Verhältniß sucht man durch die Division, um **wievielmal** die eine Zahl größer als die andere sey; der Quotient heißt der **Exponent** (Name) **des Verhältnisses** und der Ausdruck des Verhältnisses ist 3 : 18; oder 18 : 3. Der Exponent ist 6 oder $\frac{1}{6}$.

§. 55.

Jedes Verhältniß besteht aus zwey Gliedern. Zwey arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die Differenz in beiden gleich ist, z. B. 6 — 2 und 8 — 4. Zwey geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn die Exponenten der Verhältnisse gleich sind, z. B. 3 : 6 und 4 : 8. Zwey gleiche Verhältnisse machen eine Proportion aus, also zwey arithmetische eine arithmetische, zwey geometrische eine geometrische. Der Ausdruck von jener ist z. B.

$6 - 2 = 8 - 4$. Der Ausdruck von dieser ist $3 : 6 = 4 : 8$. Jede Proportion besteht also aus vier Gliedern. In der Folge wird nur von geometrischen Proportionen die Rede seyn.

§. 56.

Wenn ein Verhältniß gegeben, also der Exponent des Verhältnisses bekannt ist §. 54: so läßt sich für jede gegebene Zahl ein Verhältniß finden, welches dem gegebenen gleich ist; denn man darf nur die gegebene Zahl mit dem Exponenten des gegebenen Verhältnisses multipliciren, so ist das zweite Glied des zweiten Verhältnisses gefunden, z. B. das gegebene Verhältniß sey $3 : 18$, der Exponent des Verhältnisses also 6, die gegebene Zahl sey 5, so ist 5×6 oder 30 das zweite Glied des zweiten Verhältnisses, und $3 : 18 = 5 : 30$ nach §. 55.

§. 57.

Unter dem Ausdruck $\frac{12}{4}$ versteht man den Quotienten, der herauskommen würde, wenn man 12 durch 4 dividirte. Jedes einfache Verhältniß kann man wie einen Quotienten ausdrücken; also $3 : 18$ kann man ausdrücken durch $\frac{3}{18}$. Man kann also auch eine Proportion, z. B. $2 : 6 = 5 : 15$ so schreiben $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$.

Nun ist nach § 27, 3; $\frac{2 \times 15}{6 \times 15} = \frac{5 \times 6}{15 \times 6}$,
also auch nach § 50, 3; $2 \times 15 = 5 \times 6$.

Oder: **das Product der beiden äusern Glieder in einer geometrischen Proportion ist gleich dem Producte der beiden mittlern.** Dieses zeigt sich auch auffallend in jeder Proportion, worin der Exponent des Verhältnisses eine ganze Zahl ist, z. B.

$3 : 18 = 5 : 30$ oder
$3 : 3 \times 6 = 5 : 5 \times 6$ und
$3 \times 5 \times 6 = 3 \times 5 \times 6.$

§. 58.

Durch den gefundenen Satz läßt sich jede gegebene Proportion in eine Gleichung verwandeln, und dadurch ist man im Stande, wenn drey Glieder in einer Proportion gegeben sind, das vierte zu finden. Um dies zu erläutern soll ein Glied nach dem andern in der Proportion $3 : 18 = 4 : 24$ als unbekannt angenommen, und mit Hülfe jenes Satzes durch eine Gleichung gefunden werden.

1) $x : 18 = 4 : 24$
$x \times 24 = 18 \times 4$, also nach §. 50, 4
$x = \frac{18 \times 4}{24} = 3.$

2) $3 : x = 4 : 24$
$3 \times 24 = x \times 4$, und nach §. 50, 4
$x = \frac{3 \times 24}{4} = 18.$

3) $3 : 18 = x : 24$
$3 \times 24 = 18 \times x$, und nach §. 50, 4
$x = \frac{3 \times 24}{18} = 4.$

4) $3 : 18 = 4 : x$
$3 \times x = 18 \times 4$, also nach §. 50, 4
$x = \frac{18 \times 4}{3} = 24.$

§. 59.

Da der Exponent des Verhältnisses immer derselbe bleibt, wenn man beide Glieder eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt; oder da, wenn man das Verhältniß $3 : 9$ so ausdrückt $\frac{3}{9}$ §. 57, und $\frac{3}{9} = \frac{3}{9} \times \frac{8}{8} =$

$\frac{3}{9}$

$\frac{3:3}{9:3}$ ist: so bleibt ein Verhältniß ungeändert, wenn man beide Glieder mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt. Hieraus folgt

1) Daß man jedes Verhältniß, dessen Glieder Brüche oder ganze Zahlen mit angehängten Brüchen sind, in ein Verhältniß verwandeln kann, dessen Glieder ganze Zahlen sind. Man multiplicirt nämlich die ganzen Zahlen mit dem Product aus den Nennern der Brüche, und jedes Bruchs Zähler mit dem Nenner des andern Bruchs.

$3\frac{1}{5} : 4\frac{2}{3}$ ist $48:70$ denn
$3 + \frac{1}{5} : 4 + \frac{2}{3} = 3 \times 3 + \frac{3}{5} : 4 \times 3 + 2 =$
$3 \times 3 \times 5 + 3 : 4 \times 3 \times 5 + 2 \times 5 =$
$45 + 3 : 60\ 10 + = 48:70.$

a) Wenn eines Bruches Nenner in dem Nenner des andern Bruchs aufgeht, so braucht man nur mit dem größern Nenner die beiden ganzen Zahlen und des Bruches Zähler zu multipliciren, dessen Nenner in dem Nenner des andern aufgeht.

$2\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} = 10:27$, denn $2 + \frac{1}{2} : 6 + \frac{3}{4} = 2$
$\times 4 + \frac{4}{2} : 6 \times 4 + 3 = 8 + 2 = 24 + 3 =$
$10:27.$

b) Ist nur ein Glied ein Bruch, oder eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch, so werden beide Glieder mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt.

$1\frac{1}{3} : 6$ ist $4:18$, denn $1 + \frac{1}{3} : 6 = 3 + 1 :$
$6 \times 3 = 4:18.$

c) Sind beide Glieder bloße Brüche, so multiplicirt man jedes Bruches Zähler mit des andern Nenner.

$\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$ ist $15:6$, denn $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6}{}^{\times 3} : \frac{3}{3} =$
$5 \times \frac{3}{6} \times 6 : 3 \times \frac{6}{3} = 15:6.$

2) Es

2) Es folgt ferner daraus, daß man ein jedes Verhältniß, dessen Glieder einen gemeinschaftlichen Divisor haben, einfacher ausdrücken kann, wenn man beide Glieder mit diesem Divisor dividirt, z. B.

$$3 : 18 = \frac{3}{3} : \frac{18}{3} = 1 : 6.$$

§. 60.

Wenn $3 : 6 = 5 : 10$ ist, so ist auch $3 \times 10 = 6 \times 5$ (§. 57); und auch $\frac{3 \times 10}{5 \times 10} = \frac{6 \times 5}{5 \times 10}$ (§. 50. 4) also auch $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (§. 27. 6) oder $3 : 5 = 6 : 10$ (§. 57). **Man kann also die mittlern Glieder einer Proportion verwechseln, ohne daß die Proportion dadurch geändert wird.** Befindet sich daher auch im dritten Gliede ein Bruch, so darf man, um diesen wegzuschaffen, mit dem ersten und dritten Gliede so verfahren, wie man mit dem ersten und zweiten im vorigen §. verfuhr, z. B.

1) $1 : 3 = 4\frac{1}{2} : x$ ist
$2 : 3 = 9 : x$

2) $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} = \frac{1}{5} : x$ ist
$\frac{4}{3} : 3 = \frac{1}{5} : x$ und $20 : 9 = 1 : x$.

Es lassen sich überhaupt mit den Gliedern einer Proportion alle mögliche Veränderungen vornehmen, ohne daß die Proportion dadurch geändert wird, wenn nur das Product der beiden äusern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich bleibt. §. 57.

§. 61.

Aus zwey Proportionen kann man durch die Multiplication der Glieder eine dritte machen, z. B.

$$5 : 15 = 3 : 9$$
$$2 : 8 = 4 : 16$$
$$10 : 120 = 12 : 144.$$

Denn $\frac{15}{5} = \frac{9}{3}$ und $\frac{8}{2} = \frac{16}{4}$ nach §. 57, also auch $\frac{15}{5} \times \frac{8}{2} = \frac{9}{3} \times \frac{16}{4}$ nach §. 50. 3, und hieraus $5 \times 2 : 15 \times 8 = 3 \times 4 : 9 \times 16$. Also auch aus drey, vier und mehrern Proportionen eine einzige. Wenn man folgende Proportionen hat

$$3 : 4 = 5 : a$$
$$1 : 6 = a : b$$
$$5 : 2 = b : c$$
$$3 : 7 = c : x$$

so daß das letzte Glied der vorhergehenden immer das dritte Glied in der folgenden ist, so hat man $3 \times 1 \times 5 \times 3 : 4 \times 6 \times 2 \times 7 = 5 \times a \times b \times c : a \times b \times c \times x$. Nun mögen a, b, c Zahlen bedeuten, welche man will, so ist doch immer $a \times b \times c = a \times b \times c$; folglich ist $5 \times a \times b \times c = a \times b \times c \times x = 5 : x$ nach §. 59; und es ist $3 \times 1 \times 5 \times 3 : 4 \times 6 \times 2 \times 7 = 5 : x$.

Eilftes Kapittel.

Von der Anwendung der einfachen Proportion oder von der Regeldetri.

§. 62.

Wenn ein Maaß oder ein Gewicht von einer Waare einen bestimmten Preis hat, so stehen alle Maaßen