I. Ueber die Einrichtung allgemeiner Sterbe-Cassen und die dabey vorkommenden Berechnungen. (Fortsetzung.) Von den sogenannten Verbindungs-Renten.

Oldenburgische Zeitschrift,

herausgegeben

von

G. A. v. Halem und G. A. Gramberg.

Dritten Bandes Drittes Stück.

I.

Ueber die Einrichtung allgemeiner Sterbe-Cassen und die dabey vorkommenden Berechnungen. *)

(Fortsetzung.)

Von den sogenannten Verbindungs-Renten.

Verbindungs-Renten pflegen im Allgemeinen diejenigen Lebens-Renten genannt zu werden, welche nicht von dem eigenen Leben des Rentenirers allein, sondern zugleich mit von dem Leben oder Tode irgend eines oder mehrerer andern Individuen, abhängig sind, so, daß sie entweder nur bis zu des Rentenirers eigenem

*) S. B. II. St. 6. S. 481. f.

oder irgend eines Andern Absterben, oder erst nach dem Tode irgend einer oder mehrerer bestimmten Personen, erhoben werden. Es finden dabey sehr viele Abweichungen und verwickelte Berechnungen Statt, welche Letztere, wie sich in der Folge ergeben wird, um so weitläuftiger und schwieriger sind, je größer die Anzahl der combinirten Individuen ist.

Ohne mich bey einer Erklärung der verschiedenen Titeln unter welchen Verbindungs-Renten-Verträge abgeschlossen zu werden pflegen, aufzuhalten, werde ich, der Kürze halber, mich hier auf blosse Rechnungs-Beyspiele einschränken und es dem aufmerksamen Leser selbst überlassen dürfen, sich den Umständen nach den Begriff von einer Wittwen-Waisen-Aussteuer- oder irgend einer andern Versorgungs-Anstalt nach Belieben hinzuzudenken.

Zu Ersparung des Raums habe ich die vorkommenden Berechnungen durchgängig nur für das hohe Alter angestellt; daß die Anwendbarkeit der entwickelten Formeln durch den Unterschied des Alters nichts verliehre, verdient kaum, erinnert zu werden.

A. Verbindungs-Renten zu Zweyen.

Erstes Beyspiel.

Eine 80 jährige und eine 90 jährige Person verlangen zusammen eine Leibrente von 200 Rthlr. die über 1 Jahr anfangen und so lange am Ende eines jeden Jahrs erhoben werden soll, als beyde Rentenirer zusammen leben; was wird an Mise sogleich baar zu entrichten seyn?

Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß

	der 80 jährige lebe:	der 90 jährige lebe:	folglich, daß beyde zusammen leben:
üb. 1 J.	$= \frac{320}{370}$	$= \frac{50}{60}$	$= \frac{320\times50}{370\times60}$
— 2 —	$= \frac{280}{370}$	$= \frac{40}{60}$	$= \frac{280\times40}{370\times60}$
— 3 —	$= \frac{240}{370}$	$= \frac{30}{60}$	$= \frac{240\times30}{370\times60}$

u. s. w. folglich muß der Unitäts-Werth der Rente seyn, und zwar der Rente

über 1 Jahr $= \frac{320\times50\times\frac{25}{26}}{370\times60} = \frac{15384,62}{22200}$

— 2 — $= \frac{280\times40\times(\frac{25}{26})^2}{370\times60} = \frac{10355,03}{22200}$

— 3 — $= \frac{240\times30\times(\frac{25}{26})^3}{370\times60} = \frac{6400,773}{22200}$

$$\text{über 4 Jahr} = \frac{200 \times 20 \times (\frac{25}{26})^4}{370 \times 60} = \frac{3419,216}{22200}$$

$$- 5 - = \frac{170 \times 10 \times (\frac{25}{26})^5}{370 \times 60} = \frac{1397,276}{22200}$$

$$- 6 - = \frac{140 \times 1 \times (\frac{25}{26})^6}{370 \times 60} = \frac{110,664}{22200}$$

$$\text{Summa:} \frac{37067,559}{22200}$$

= 1,66971, macht für 200 Rthlr. Rente 333,942 Rthlr.

Sollte aber die Rente nicht mit dem letzten vollen Jahre des Zusammenlebens aufhören, sondern bis an den Trennungs-Tag vergütet werden; so würde man hier offenbar eben so, wie in gleichem Falle bey den einfachen Leibrenten, (m. s. das Erste der desfälligen Beyspiele) die Factoren der Lebens-Wahrscheinlichkeiten in den Zählern allenthalben um die Hälfte der von Zeit zu Zeit ausfallenden Individuen vermehren müssen.

Da, wie hier der Augenschein ergiebt, die Berechnung des Werths oder der Mise einer Verbindungs-Rente unweit mehr Mühe erfordert, als die Berechnung des Werths einer einfachen Leibrente; so hat man dabey auch um so viel mehr Ursache, sich nach jeder möglichen Erleichterung oder Abkürzung der Arbeit umzusehen. Es verdient daher untersucht zu werden, ob aus dem für gewisse individuelle Jahre gefundenen Werth einer Verbindungs-Rente sich nicht auf eben die Weise, wie bey den einfachen Leibrenten, der Werth einer Verbindungs-Rente für die nächsthöhern oder niedrigern Jahre bestimmen lasse? Obgleich ich diesen Lehrsatz in keiner von den über den vorliegenden Gegenstand mir bekannten wenigen Schriften vorgetragen finde, so hat er doch in der That so wenig Schwierigkeit, daß ich unmöglich glauben kann, er sey noch keinem von denen, welche vor mir diesen Gegenstand bearbeiteten, beygefallen. Dem sey nun aber, wie ihm wolle, so ist die Aufgabe auch hier an ihrem Platz.

Gesetzt, daß der Werth einer der Obigen in allem völlig gleichen Rente für die Coexistenz eines 81 jährigen mit einem 91 jährigen gefunden werden sollte, so würde man nach Anleitung des vorhergehenden Exempels die folgende Formel zu berechnen haben:

Werth der Verbindungs-Rente eines 81 jährigen und eines 91 jährigen, und zwar

der Rente

über 1 Jahr $= \dfrac{280 \times 40 \times \frac{25}{26}}{320 \times 50}$

— 2 — $= \dfrac{240 \times 30 \times (\frac{25}{26})^2}{320 \times 50}$

— 3 — $= \dfrac{200 \times 20 \times (\frac{25}{26})^3}{320 \times 50}$

— 4 — $= \dfrac{170 \times 10 \times (\frac{25}{26})^4}{320 \times 50}$

— 5 — $= \dfrac{140 \times 1 \times (\frac{25}{26})^5}{320 \times 50}$

Wird nun diese Formel mit der Obigen für den Werth der Verbindungs-Rente eines 80 jährigen und eines 90 jährigen Rentenirers verglichen, so finden sich, mit Ausnahme der Anzahl der Factoren, alle Umstände völlig eben so, wie solche in ähnlicher Absicht bey der ersten Aufgabe von den gemeinen Leibrenten entwickelt worden; es muß also die dort bestimmte Regel auch hier ihre Anwendung finden, folglich der Unitäts-Werth der Coexistenz einer 81 jährigen mit einer 91 jährigen Person seyn:

$$\left\{\frac{\dfrac{1,66971}{320 \times 50 \times \frac{25}{26}}}{370 \times 60}\right\} - 1 = 1,40939.$$

macht für 200 Rthlr. jährlicher Rente 281,878 Rthlr.

Eben so muß also auch der Unitäts-Werth einer gleichmässigen Verbindungs-Rente eines 79 jährigen und eines 89 jährigen Rentenirers seyn:

$$(1,66971 + 1) \times \left(\frac{370 \times 60 \times \frac{25}{26}}{430 \times 80} \right) = 1,65663$$

Rthlr.

Ueberhaupt muß demnach jene Regel auf die Berechnung einer jeden stetigen Rente, sie sey einfach oder zusammengesetzt, ihre Anwendung finden; man kann folglich darnach sehr leicht, sowohl Verbindungs- als einfache Leib-Renten-Tafeln verfertigen, und aus solchen wiederum andere, z. B. Wittwen- Waisen- und sonstige Ueberlebungs-Renten-Tafeln construiren, ohne daß es der zu dem Ende so häufig in Vorschlag gebrachten Durchschnitts- und Interpolirungs-Methoden, die sammt und sonders, wo nicht zum Theil mehr, doch wenigstens eben so viel Mühe, als die obige Verfahrungs-Art, erfordern, dabey aber niemals völlig genaue Resultate geben, bedarf.

Zweites Beyspiel.

Ein Neunzigjähriger verlangt für einen Siebenzigjährigen bis an das Ende des letzten vollen Lebensjahrs desselben eine jährliche Ueberlebungs-Rente von 500 Rthlr. dergestalt, daß die am Ende seines, des Versorgers Sterbe-Jahrs fällige erste Rente, ohne Rücksicht, ob er im Anfange oder am Ende des Jahrs gestorben sey, für voll erhoben werden soll. Den Werth dieser Rente will er halb sogleich baar, halb aber während der Coexistenz mittelst jährlicher Beyträge entrichten; was wird der Expectant sogleich, und was über 1 Jahr und ferner am Ende eines jeden Jahrs, so lange er mit dem Versorgten in ungetrennter Verbindung lebt, zu bezahlen haben?

Da die Wahrscheinlichkeit, daß

	der 70 jährige lebe:	der 90 jährige todt sey:	folglich, daß beydes Statt finde?
für das erste J.	$=\frac{1030}{1120}$	$=1-\frac{50}{60}$	$=\frac{1030\times10}{1120\times60}$
— — zweyte	$=\frac{940}{1120}$	$=1-\frac{40}{60}$	$=\frac{940\times20}{1120\times60}$

so wäre der Unitäts-Werth einer Ueberlebungs-

Rente für den 70 jährigen, und zwar der eventuellen Rente

$$\text{über 1 Jahr} = \frac{1030 \times 10 \times \frac{25}{26}}{1120 \times 60}$$

$$\text{— 2 —} = \frac{940 \times 20 \times (\frac{25}{26})^2}{1120 \times 60}$$

u. s. w. Da sich aber aus dieser Formel der Werth der Verbindungs-Rente, als welcher um des zu berechnenden jährlichen Beytrags willen bekannt seyn muß, nicht bestimmen läßt, so ist man in solchen Fällen genötigt, zuerst den Werth einer Leibrente für den Versorgten, und dann den Werth einer verbindungs-Rente für beyde Personen, besonders zu berechnen; Dieser von Jenem abgezogen, läßt eben dasjenige zum Rest, was durch die Entwickelung der so eben angedeuteten Formel gefunden wird, nemlich den Werth einer Rente für die Dauer der solitarischen Existenz des Versorgten.

Unitäts-Werth der Verbindungs-Rente eines 70 jahrigen und eines 90 jährigen, und zwar der Rente

$$\text{über 1 Jahr:} \frac{1030 \times 50 \times \frac{25}{26}}{1120 \times 60} = \frac{49519{,}235}{67200}$$

$$\text{— 2 —} \frac{940 \times 40 \times (\frac{25}{26})^2}{1120 \times 60} = \frac{34763{,}36}{67200}$$

über 3 Jahr: $\frac{850 \times 30 \times (\frac{25}{26})^3}{1120 \times 60} = \frac{22669,41}{67200}$

— 4 — $\frac{770 \times 20 \times (\frac{25}{26})^4}{1120 \times 60} = \frac{13163,985}{67200}$

— 5 — $\frac{690 \times 10 \times (\frac{25}{26})^5}{1120 \times 60} = \frac{5671,298}{67200}$

— 6 — $\frac{620 \times 1 \times (\frac{25}{26})^6}{1120 \times 60} = \frac{489,95}{67200}$

Summa; $\frac{126277,238}{67200}$

$= 1,87913$. Da nun der Unitäts-Werth einer für die vollen Lebens-Jahre eines Siebenzigjährigen berechneten Rente nach dem fünften Beyspiel von den einfachen Leib-Renten $= \frac{6709,2585}{1120} = 5,99041$; so muß der gefragte Unitäts-Werth der Ueberlebungs-Rente für den Siebenzigjährigen seyn: $5,99041 - 1,87913 = 4,11128$, macht für eine der gleichen Rente von 500 Rthlr. 2055,64 Rthlr.

Von dieser Total-Summe soll nun nach der Aufgabe die eine Hälfte mit 1027,82 Rthlr. beym Antritt baar, die andere Hälfte aber während des Zusammenlebens durch jährliche Beyträge abgeführt werden; es wird folglich die Grösse eines jeden der letztern seyn müssen:

$$\frac{1027,82}{1,87913} = 546,966 \text{ Rthlr.}$$

Sollte aber gar kein Antritts-Geld, sondern das Aequivalent des Werths der ganzen Rente mittelst jährlicher Beyträge, und zwar praenumerando, d. h. zum erstenmal sogleich bey der Aufnahme, entrichtet werden; so würde man, um die Größe eines solchen Beytrags zu finden zuvörderst den Unitäts-Werth aller Beyträge oder der Verbindungs-Rente um 1 vermehren, und durch diese Summe sodann den Total-Werth der Ueberlebungs-Rente dividiren müssen, folglich auf den Fall erhalten:

$$\frac{2055,64}{1,87913+1} = 713,98 \text{ Rthlr.}$$

Gewöhnlich aber pflegt bey Wittwen- oder Waisen-Cassen — als auf welche das obige Beyspiel zunächst seine Anwendung findet — die erste Rente nicht für voll, sondern nur von dem Tode des Versorgers an, auch nicht bloß bis an das Ende des letzten vollen Lebensjahrs, sondern bis an den Todestag des Versorgten, pro rata temporis vergütet zu werden.

Es ist klar, daß in diesem Fall sowohl die Leib-Rente des Versorgten, als auch die Verbindungs-Rente, durch die angegebenermassen um die Hälfte der periodischen Abgänge der Lebenden vermehrten Wahrscheinlichkeits-Brüche gesucht werden müsse. Da man über diesen Punct oft zu leichtsinnig hinwegzueilen pflegt, so verdient er hier ausführlich erörtert zu werden.

Das Risiko mit einem siebenzigjährigen Rentenirer wegen einer jährlichen Leibrente = 1, die bis an den Todestag desselben bezahlt werden soll, ist, und zwar

$$\text{f. das 1ste Jahr} = \frac{1075 \times \frac{25}{26}}{1120} = \frac{1033,654}{1120}$$

$$\text{— 2te —} = \frac{985 \times (\frac{25}{26})^2}{1120} = \frac{910,6876}{1120}$$

$$\text{— 3te —} = \frac{895 \times (\frac{25}{26})^3}{1120} = \frac{795,6517}{1120}$$

$$\text{— 4te —} = \frac{810 \times (\frac{25}{26})^4}{1120} = \frac{692,3913}{1120}$$

$$\text{— 5te —} = \frac{730 \times (\frac{25}{26})^5}{1120} = \frac{600,0068}{1120}$$

$$\text{— 6te —} = \frac{655 \times (\frac{25}{26})^6}{1120} = \frac{517,6561}{1120}$$

$$\text{— 7te —} = \frac{585 \times (\frac{25}{26})^7}{1120} = \frac{444,5519}{1120}$$

f. das 8te Jahr $= \frac{520 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{8}}{1120} = \frac{379{,}9589}{1120}$

— 9te — $= \frac{460 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{9}}{1120} = \frac{323{,}1899}{1120}$

— 10te — $= \frac{400 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{10}}{1120} = \frac{270{,}2256}{1120}$

— 11te — $= \frac{345 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{11}}{1120} = \frac{224{,}1054}{1120}$

— 12te — $= \frac{300 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{12}}{1120} = \frac{187{,}3792}{1120}$

— 13te — $= \frac{260 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{13}}{1120} = \frac{156{,}1493}{1120}$

— 14te — $= \frac{220 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{14}}{1120} = \frac{127{,}0445}{1120}$

— 15te — $= \frac{185 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{15}}{1120} = \frac{102{,}724}{1120}$

— 16te — $= \frac{155 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{16}}{1120} = \frac{82{,}7558}{1120}$

— 17te — $= \frac{130 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{17}}{1120} = \frac{66{,}7385}{1120}$

— 18te — $= \frac{110 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{18}}{1120} = \frac{54{,}2991}{1120}$

— 19te — $= \frac{90 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{19}}{1120} = \frac{42{,}7178}{1120}$

— 20ste — $= \frac{70 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{20}}{1120} = \frac{31{,}9471}{1120}$

— 21ste — $= \frac{55 \times \left(\frac{25}{26}\right)^{21}}{1120} = \frac{24{,}1359}{1120}$

$$\text{f. das 22ste J.} = \frac{45 \times (\frac{25}{26})^{22}}{1120} = \frac{18{,}988}{1120}$$

$$\text{— 23ste —} = \frac{35 \times (\frac{25}{26})^{23}}{1120} = \frac{14{,}2004}{1120}$$

$$\text{— 24ste —} = \frac{25 \times (\frac{25}{26})^{24}}{1120} = \frac{9{,}735}{1120}$$

$$\text{— 25ste —} = \frac{15 \times (\frac{25}{26})^{25}}{1120} = \frac{5{,}6267}{1120}$$

$$\text{— 26ste —} = \frac{5{,}5 \times (\frac{25}{26})^{26}}{1120} = \frac{1{,}9838}{1120}$$

$$\text{— 27ste —} = \frac{0{,}5 \times (\frac{25}{26})^{27}}{1120} = \frac{0{,}1734}{1120}$$

$$\text{Summa:} \ \frac{7118{,}6777}{1120} = 6{,}35596.$$

Ferner ist das Risiko wegen einer bis an den Trennungstag fortlaufenden Verbindungs-Rente für eine 70 jährige und eine 90 jährige Person, als Unität betrachtet,

$$\text{f. d. 1ste J.} = \frac{1075 \times 55 \times (\frac{25}{26})}{1120 \times 60} = \frac{56850{,}98}{67200}$$

$$\text{— 2te —} = \frac{985 \times 45 \times (\frac{25}{26})^{2}}{1120 \times 60} = \frac{40980{,}95}{67200}$$

$$\text{— 3te —} = \frac{895 \times 35 \times (\frac{25}{26})^{3}}{1120 \times 60} = \frac{27847{,}81}{67200}$$

$$\text{— 4te —} = \frac{810 \times 25 \times (\frac{25}{26})^{4}}{1120 \times 60} = \frac{17309{,}79}{67200}$$

$$— \text{5te} — = \frac{730 \times 15 \times (\frac{25}{26})^5}{1120 \times 60} = \frac{9000,102}{67200}$$

$$— \text{6te} — = \frac{655 \times 5,5 \times (\frac{25}{26})^6}{1120 \times 60} = \frac{2847,11}{67200}$$

$$— \text{7te} — = \frac{585 \times 0,5 \times (\frac{25}{26})^7}{1120 \times 60} = \frac{222,276}{67200}$$

$$\text{Summa:} \ \frac{155059,018}{67200}$$

$= 2,30789.$

Hiernach wäre also der Unitäts-Werth einer Ueberlebungs-Rente für den Siebenzigjährigen, die erst mit dem Todestage des 90 jährigen Versorgers ihren Anfang nehmen, dann aber bis an den Todestag des Erstern bezahlt werden sollte, $= 6,35596 - 2,30789 = 4,04807$, machte für 500 Rthlr. jährlicher Rente 2024,035 Rthlr.; wohingegen für den in der obigen Aufgabe angenommenen Fall 2055,64 Rthlr. gefunden worden sind. Die Differenz ist 1,5615 Procent.

Bey der Berechnung einer statt eines Antritts-Capitals abzuhaltenden periodischen Contribution aber darf, in sofern nemlich diese, wie gewöhnlich, mit dem letzten vollen Lebensjahre des Contribuenten aufhören, und nicht etwa für das Sterbejahr desselben pro rata temporis nachgelegt werden muß, selbstredend nicht der auf die letztere, sondern nur der auf die erstere Weise (für die vollen Jahre der Coexistenz) gefundene Werth der Vorbindungs-Rente zum Grunde gelegt werden. Auf den Fall also, daß die gefragte Ueberlebungs-Rente des Siebenzigjährigen erst mit dem Trennungs-Tage anfangen, dann aber bis an seinen Todes-Tag fortlaufen sollte, würde die Grösse des jährlichen Beytrags seyn, und zwar als Aequivalent

1) der ganzen Mise: $\frac{2024,035}{1,87913+1} = 703,0023$ Rthlr.

2) der halben Mise: $\frac{2024,035}{1,87913\times 2} = 538,5564$ Rthl.

differirt mit der erstern Berechnung wie vorhin 1,5615 Procent.

Diese Differenz erscheint entweder positiv oder negativ, jenachdem der Versorger oder der Versorgte der Aelteste von beyden ist. Sie ist um so grösser, je mehr der Versorger und der Versorgte in ihrem Alter von einander abweichen, und verschwindet dagegen ganz, wenn das beiderseitige Alter völlig gleich ist.

Aus einer Vernachlässigung dieses Unterschiedes können bey Instituten von beträchtlichem Umfange große Unzuträglichkeiten entstehen, deren Ursachen man sich dann oft nicht zu erklären weiß. So scheint mir z. B. eben darinn, der auf alle Fälle nicht ganz ungegründete Vorwurf zum Theil seinen Grund zu haben, den der in diesem Fache sehr berühmte Göttingsche Senator, Herr Kritter, sich in dem zweiten Stück des Göttingschen Magazins, dritten Jahrganges, pag. 305, gegen die Einsatztabelle der Herzoglich Oldenburgischen Wittwen-Casse erlaubt hat; welchem Vorwurf von dem Herrn Stiftsamtmann von Oeder in dem nächstfolgenden vierten Stück des gedachten Journals pag. 483 zwar widersprochen worden, jedoch hat Dieser eben so wenig, als Jener, seine Behauptung durch Gründe zu beweisen für gut gefunden. Ob Herr Kritter seine, freylich an sich sehr superficielle, Kritik darauf zurückgenommen hat, ist mir nicht bekannt.

Da übrigens sowohl der Werth eines baaren Antritts-Capitals, als der Werth des, das

Aequivalent desselben ausmachenden periodischen Beytrags, nach der mittlern Lebens-Dauer bestimmt, die periodische Contribution aber bis an den Todestag des Contribuenten bezahlt wird: so fällt in die Augen, daß für Contribuenten von dauerhafter Gesundheit der Capital-Fuß, für Kränkliche und Schwächliche hingegen der Contributionsfuß, am vortheilhaftesten sey, der Entrepreneur aber — dessen Interesse natürlich dem Interesse der Genossen entgegen steht — bey Personen von schwacher Constitution den Capitalfuß, und im Gegentheil den Contributionsfuß zu wünschen Ursache habe.

Noch ist hier zugleich der Fall zu betrachten, da eine Rente nicht nach jährigen, sondern nach halbjährigen oder noch kleinern Perioden erhoben werden soll.

Wenn z. B. ein Siebenzigjähriger eine jährliche Leibrente von 100 Rthlr. in halbjährigen Terminen verlangte, so würde man, um den Werth dieser Rente zu finden, nach der bisher erklärten Verfahrungs-Art zuvörderst die Sterblichkeits-Ordnung auf halbe Jahre reduciren, und sodann, wenn a die erste, b die zweite, c die dritte u. s. w. der für die halben Jahre gefundenen Ordinaten auf der sogenannten Lebens-Linie vorstellte, die folgende Formel zu berechnen haben:

Werth der Rente

$$\text{über } \tfrac{1}{2} \text{ Jahr} = 50 \times \frac{a}{1120} \times \left(\frac{25}{26}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \; 1 \; - = 50 \times \frac{1030}{1120} \times \left(\frac{25}{26}\right)$$

$$- \; 1\tfrac{1}{2} \; - = 50 \times \frac{b}{1120} \times \left(\frac{25}{26}\right)^{1\frac{1}{2}}$$

$$- \; 2 \; - = 50 \times \frac{940}{1120} \times \left(\frac{25}{26}\right)^{2}$$

$$- \; 2\tfrac{1}{2} \; - = 50 \times \frac{c}{1120} \times \left(\frac{25}{26}\right)^{2\frac{1}{2}}$$

u. s. w. Dies wäre eine sehr weitläuftige Arbeit, denn man würde offenbar bey halbjährigen Terminen zweymal so viel, bey vierteljährigen Terminen viermal so viel u. s. w. einzelne Werthe, als bey den ganzjährigen Terminen vorkommen, diskontiren müssen, und überdem würde auch die Construirung der erforderlichen Tabelle aus einer unstetigen, gleichsam parabolisch-logistischen Grössen-Reihe keine geringe Mühe erfordern. Da nun aber die Reihe, nach der die Vermehrung eines Capitals durch den Zinseszins von Termin zu Termin steigt, als eine geometrische Progression zu betrachten, deren Exponent, seiner Dignität nach, der Anzahl der Termine gleich ist; so finden, wie aus dem Vorhergehenden zum Theil schon erhellt, dabey eben diejenigen Kunstgriffe Statt, die die höhere Rechenkunst zur bequemen Auflösung jener geometrischen Grössen-Reihen an die Hand giebt, und auf welche man im gegenwärtigen Fall durch folgende Schlüsse gelangt:

Wenn jemand von einer gewissen, erst über 1 Jahr schuldigen Summe, z. B. 100 Rthlr., über ein halbes Jahr 50 Rthlr. und über 1 Jahr die letzten 50 Rthlr. abtragen wollte, so würde er offenbar an den zuerst bezahlten 50 Rthlr., da er diese ein halbes Jahr länger hätte nutzen können, das commodum temporis verliehren. Der Betrag dieses Nutzens wäre bey 4 Procent Zinsen am Ende des Jahrs = 1 Rthlr., den also der Gläubiger, wenn der Debitor keinen Schaden leiden sollte, sich an dem zweiten Termin würde kürzen lassen müssen. Verlangte demnach der Gläubiger die Bezahlung in zwey gleichen halbjährigen Terminen, so würde, da, wenn man die Grösse eines jeden derselben g nennt, der Debitor den bey dem ersten Termin verlohrnen Nutzen am Ende des Jahrs auf $\left\{\left(\frac{26}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}\times g$ Rthl. in Anschlag bringen könnte, seyn müssen:

$$2\,g+\left\{\left(\frac{26}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}\times g = 100 \text{ Rthlr.}$$

$$\text{folglich:} \quad g = 49{,}5531 \text{ Rth.}$$

Eben so wird auch, wenn man für ein sogleich baar zu erlegendes Capital, $= C$, eine jährliche Rente, $= R$, bekommen kann, für eine halbjährliche Rente, $= \frac{1}{2}\,R$, C zu klein seyn, mithin für halbjährige Termine nothwendig entweder die Mise vermehrt, oder die Rente vermindert werden müssen.

Der gegenwärtige baare Werth einer jährlichen Rente, $= R$, ist, und zwar fällig

über 1 Jahr $= \frac{25}{26} \times R$

— 2 — $= \left(\frac{25}{26}\right)^2 \times R$

— n — $= \left(\frac{25}{26}\right)^n \times R$

folglich: $\left[\dfrac{\left(\frac{25}{26}\right)^{n+1} - \frac{25}{26}}{\frac{25}{26} - 1}\right] \times R$

$$= \left[\frac{\left(\frac{26}{25}\right)^{n} - 1}{\left(\frac{26}{25}\right)^{n+1} - \left(\frac{26}{25}\right)^{n}}\right] \times R = C$$

gleichergestalt ist eine halbjährige Rente $= \frac{1}{2} R$ jezt baar werth, und zwar

die Rente über $\frac{1}{2}$ Jahr $\left(\frac{25}{26}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{2}$

— — — 1 — $\left(\frac{25}{26}\right) \times \frac{R}{2}$

— — — $1\frac{1}{2}$ — $\left(\frac{25}{26}\right)^{1\frac{1}{2}} \times \frac{R}{2}$

— — — n — $\left(\frac{25}{26}\right)^{n} \times \frac{R}{2}$

mithin: $\left[\dfrac{\left(\frac{25}{26}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{25}{26}\right)}{\left(\frac{25}{26}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}\right] \times \frac{R}{2}$

$$= \left[\frac{\left(\frac{26}{25}\right)^{n} - 1}{\left(\frac{26}{25}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{26}{25}\right)^{n}}\right] \times \frac{R}{2} = M$$

Ist demnach C die Mise für eine jährliche Rente $= R$, und M die Mise einer halbjährlichen Rente $= \frac{1}{2}R$; so hat man folgende allgemeine Formel:

$$R = \frac{(\frac{26}{25} - 1) \times C}{(\frac{26}{25})^n - 1} = \frac{2 \times [(\frac{26}{25})^{\frac{1}{2}} - 1] \times M}{(\frac{26}{25})^n - 1}$$

folglich $C = \dfrac{2 \times [(\frac{26}{25})^{\frac{1}{2}} - 1] \times M}{\frac{26}{25} - 1}$

und $M = \dfrac{(\frac{26}{25} - 1) \times C}{2 \times [(\frac{26}{25})^{\frac{1}{2}} - 1]}$

Wollte man aber die Mise nicht erhöhen, sondern mit einer kleinern halbjährlichen Rente $= r$ zufrieden seyn; so wäre offenbar

$$\left[\frac{(\frac{26}{25})^n - 1}{(\frac{26}{25})^{n + \frac{1}{2}} - (\frac{26}{25})^n}\right] \times r = \left[\frac{(\frac{26}{25})^n - 1}{(\frac{26}{25})^{n+1} - (\frac{26}{25})^n}\right] \times R$$

mithin $r : R = \dfrac{1}{\frac{26}{25} - 1} : \dfrac{1}{(\frac{26}{25})^{\frac{1}{2}} - 1}$

Nach diesen Verhältnissen also wird aus einer nach vollen Jahren berechneten Mise oder Rente für alle beliebige kleinere Zeittheile $= z$, so wie auch umgekehrt aus dieser die Mise oder Rente für jährige Termine, gefunden; denn allgemein muß für $\frac{1}{z}$ jährige Perioden seyn:

$$M = \frac{(\frac{26}{25} - 1) \times C}{z \times [(\frac{26}{25})^{\frac{1}{z}} - 1]}$$

und $$r : R = \frac{1}{\frac{26}{25} - 1} : \frac{1}{(\frac{26}{25})^{\frac{1}{z}} - 1}$$

Verlangte also — um die obige Regeln hier auf einen einzigen bestimmten Fall anzuwenden — ein Siebenzigjähriger, der nach dem fünften Beyspiel von den einfachen Leibrenten für eine jährliche Rente von 100 Rthl. 599,041 Rthlr. Einschuß-Capital würde erlegen müssen, vierteljährlich 25 Rthlr.; so wäre $C = 599,041$ und $z = 4$, folglich

$$M = \frac{(\frac{26}{25} - 1) \times 599,041}{4 \times [(\frac{26}{25})^{\frac{1}{4}} - 1]}$$

$$\text{Log.}\ (\tfrac{26}{25} - 1) \times 599,041 = 1,3795165$$
$$- \ 4 \times [(\tfrac{26}{25})^{\frac{1}{4}} - 1] = 0,5956285 - 2$$

also log. $M. = 2,7838880$
$= \text{Log.}\ 607,978$ Rthlr.

Sollte aber die Mise nicht erhöhet, sondern vierteljährlich r erhoben werden; so hätte man, da $R = 100$,

$$r = \frac{\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \times 100}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log.}\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \times 100 & = 0{,}9935685 - 1 \\ - \quad \frac{26}{25} - 1 & = 0{,}6020600 - 2 \\ \hline \text{folglich Log. } r & = 1{,}3915085 \end{array}$$

$= \text{Log. } 24{,}6325$ Rthlr.

Der Rentenirer würde demnach bey vierteljährigen Terminen entweder der Mise (607,978 — 599,041) = 8,937 Rthlr. sogleich baar hinzulegen, oder an der Rente sich terminlich (25 — 24,6325) = 0,3675 Rthlr, kürzen lassen müssen.

Drittes Beyspiel.

Eine 80 jährige und eine 90 jährige Person verlangen zusammen eine jährliche Leibrente von 400 Rthlr. die am Ende eines jeden Jahrs, und so lange erhoben werden soll, als von beyden Personen, noch Eine am Leben; wie hoch beläuft sich der anfängliche baare Werth oder die Mise einer solchen Rente?

Man überlege hier folgendes:

Jeder der beyden Rentenirer wird erhalten

1) so lange er mit dem Andern zusammen lebt, die Hälfte der Rente;

2) so lange er allein lebt, die volle Rente.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 1 Jahr

der 80 jährige lebe $= \frac{320}{370}$;

— 90 jährige lebe $= \frac{50}{60}$;

folglich, daß beyde zusammen leben $= \frac{320}{370} \times \frac{50}{60}$.

Ferner, daß der 80 jährige lebe, der 90 jährige aber tod sey $= \frac{320}{370} \times (1 - \frac{50}{60})$

daß der 90 jährige lebe, hingegen aber der 80 jährige tod sey

$$= \frac{50}{60} \times (1 - \frac{320}{370})$$

Der Entrepreneur oder die Casse würde also hiernach am Ende des ersten Jahrs wahrscheinlich zu bezahlen haben:

$$400 \times \left\{ \frac{\left(\frac{320}{370} \times \frac{50}{60}\right)}{2} + \left[\frac{320}{370} \times \left(1 - \frac{50}{60}\right)\right] + \frac{\left(\frac{50}{60} \times \frac{320}{370}\right)}{2} + \frac{50}{60} \times \left(1 - \frac{320}{370}\right) \right\}$$

Man setze um der Bequemlichkeit willen 370=a; 320=b; 60=c, und 50=d; so wird diese Formel in

$$400 \times \left[\frac{\frac{bd}{ac}}{2} + \frac{b}{a} - \frac{bd}{ac} + \frac{\frac{bd}{ac}}{2} + \frac{d}{c} + \frac{bd}{ac}\right]$$

$$= 400 \times \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c} - \frac{bd}{ac}\right)$$

(d. h. in $400 \times (\frac{320}{370} + \frac{50}{60} - \frac{320 \times 50}{370 \times 60})$ verwandelt; hiernach muß also der Unitäts-Werth der gefragten Rente seyn, und zwar der Rente

$$1\text{ J.} = (\tfrac{320}{370} + \tfrac{50}{60} - \tfrac{320 \times 50}{370 \times 60}) \times \tfrac{25}{26} = 0{,}939882$$

$$2 - = (\tfrac{280}{370} + \tfrac{40}{60} - \tfrac{280 \times 40}{370 \times 60}) \times (\tfrac{25}{26})^2 = 0{,}849592$$

$$3 - = (\tfrac{240}{370} + \tfrac{30}{60} - \tfrac{240 \times 30}{370 \times 60}) \times (\tfrac{25}{26})^3 = 0{,}732821$$

$$4 - = (\tfrac{200}{370} + \tfrac{20}{60} - \tfrac{200 \times 20}{370 \times 60}) \times (\tfrac{25}{26})^4 = 0{,}592972$$

$$5 - = (\tfrac{170}{370} + \tfrac{10}{60} - \tfrac{170 \times 10}{370 \times 60}) \times (\tfrac{25}{26})^5 = 0{,}45169$$

$$6 - = (\tfrac{140}{370} + \tfrac{1}{60} - \tfrac{140 \times 1}{370 \times 60}) \times (\tfrac{25}{26})^6 = 0{,}307226$$

$$7 - = \tfrac{120}{370} \times (\tfrac{25}{26})^7 \;.\;.\; = 0{,}24646$$

$$8 - = \tfrac{100}{370} \times (\tfrac{25}{26})^8 \;.\;.\; = 0{,}197484$$

$$9 - = \tfrac{80}{370} \times (\tfrac{25}{26})^9 \;.\;.\; = 0{,}151911$$

$$10 - = \tfrac{60}{370} \times (\tfrac{25}{26})^{10} \;.\;.\; = 0{,}109551$$

$11\ \text{J.} = \left(\frac{50}{370}\right) \times \left(\frac{25}{26}\right)^{11} \quad . \quad . = 0{,}087781$

$12\ — = \left(\frac{40}{370}\right) \times \left(\frac{25}{26}\right)^{12} \quad . \quad . = 0{,}067524$

$13\ — = \left(\frac{30}{370}\right) \times \left(\frac{25}{26}\right)^{13} \quad . \quad . = 0{,}048695$

$14\ — = \left(\frac{20}{370}\right) \times \left(\frac{25}{26}\right)^{14} \quad . \quad . = 0{,}031215$

$15\ — = \left(\frac{10}{370}\right) \times \left(\frac{25}{26}\right)^{15} \quad . \quad . = 0{,}015007$

$16\ — = \left(\frac{1}{370}\right) \times \left(\frac{25}{26}\right)^{16} \quad . \quad . = 0{,}001443$

Summa: 4,831254

macht für 400 Rthl. jährlicher Rente 1932,5016 Rthlr.

Da übrigens die erste Vertikal-Reihe der obigen Formel gleich dem Unitäts-Werth der Leibrente eines Achtzigjährigen, (= 4.203719) die Zweite gleich dem Unitäts-Werth einer Leibrente eines Neunzigjährigen, (= 2,297245) und die Dritte gleich dem Werth einer Verbindungs-Rente beyder Personen, (= 1,66971) so ist klar, daß dergleichen Aufgaben sich ohne alle weitläuftige Rechnung auflösen lassen, wenn man nebst einer gewöhnlichen Leibrenten-Tafel auch eine nach den vorhin entwickelten Regeln fast eben so leicht, als Jene, zu verfertigende Verbindungs-Renten-Tafel zu Zweien bey der Hand hat, denn es ist offenbar auch: (4,203719 + 2,297245 — 1,66971) =

4,831254, als dem gefundenen Unitäts-Werth der gefragten Rente.

B. Verbindungs-Renten zu Dreyen.

Erstes Beyspiel.

Was würden eine 40 jährige, eine 60 jährige und eine 88 jährig Person an Antritts Geld oder Mise erlegen müssen, um über 1 Jahr zum erstenmale, und ferner, so lange alle drey zusammen leben, am Ende eines jeden Jahrs 300 Rthlr. Rente zu bekommen?

Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß über 1 Jahr noch lebe:

der Vierzigjährige $= \frac{3670}{3740}$

der Sechzigjährige $= \frac{2010}{2100}$

der Acht und achtzigjährige $= \frac{80}{100}$

folglich die Wahrscheinlichkeit, daß alle drey zusammen leben

$$\text{über 1 Jahr} = \frac{3670 \times 2010 \times 80}{3740 \times 2100 \times 100}$$

$$\text{— 2 —} = \frac{3600 \times 1920 \times 60}{3740 \times 2100 \times 100}$$

u. s. w. Demnach wäre also der Unitäs-Werth der gefragten Rente, und zwar der Rente

über 1 Jahr $= \frac{3670 \times 2010 \times 80}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26}) = 0{,}722484$

$- 2 - = \frac{3600 \times 1920 \times 60}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^2 = 0{,}4882$

$- 3 - = \frac{3530 \times 1820 \times 50}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^3 = 0{,}363601$

$- 4 - = \frac{3460 \times 1720 \times 40}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^4 = 0{,}259084$

$- 5 - = \frac{3390 \times 1620 \times 30}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^5 = 0{,}172416$

$- 6 - = \frac{3320 \times 1520 \times 20}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^6 = 0{,}10156$

$- 7 - = \frac{3240 \times 1420 \times 10}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^7 = 0{,}044515$

$- 8 - = \frac{3160 \times 1320 \times 1}{3740 \times 2100 \times 100} \times (\frac{25}{26})^8 = 0{,}003881$

Summa: 2,155741

mithin würden für 300 Rthlr. Rente sogleich zu bezahlen seyn: 646,7223 Rthlr.

Da übrigens die in den ersten Exempeln von den einfachen Leibrenten und den sogenannten Verbindungs-Renten zu Zweien erklärten Kunstgriffe, vermitelst welcher sich aus einem bekannten Werth irgend einer stetigen Rente der Werth einer gleichmässigen Rente für das nächst höhere oder niedrigere Alter entwickeln läßt, auch auf die hier in Betrachtung gezogene Verbindungs-Rente zu Dreyen ihre Anwendung finden; so muß nach dem obigen Beyspiel seyn

Der Unitäts-Werth einer der Obigen gleichen Verbindungs-Rente

a) für einen Einundvierzigjährigen mit einem 61 und 89 jährigen

$$= \left[\frac{2{,}155741}{\frac{3670 \times 2100 \times 80}{3740 \times 2100 \times 100}} \times \frac{25}{26} \right] - 1$$

$$= 1{,}983792$$

b) für einen Neununddreißigjährigen mit einem 59 und 87 jährigen

$$= (2{,}155741 + 1) \times \frac{3740 \times 2100 \times 100}{3081 \times 2190 \times 120}$$

$$\times \frac{26}{25} = 2{,}380174, \text{ u. s. w.}$$

Zu den hier in Betrachtung gezogenen sogenannten Verbindungs-Renten zu dreyen gehören insonderheit diejenigen Waisen-Renten, welche erst nach dem Ableben beider Eltern an die pensionirten Kinder derselben bis zu einem gewissen Alter ausgezahlt werden, wie aus dem folgenden Beyspiel erhellet:

[Die Fortsetzung folgt.]

II.

Anfrage eines Butjadingers.

Die Aufsätze des Herrn Grafen v. Münnich in 2ten und 3ten Hefte der Oldenburgischen Zeitschrift veranlaßten folgende Gedanken, die ich den Herren Herausgebern zur gefälligen Mittheilung in ihrem Journale zusende. Freuen werde ich mich, wenn durch diese Anfrage sachverständige Männer bewogen würden, über die Ausführbarkeit des angedeuteten Projects näher nachzudenken.

Erwägt man den Vorschlag, einen Canal von Elsfleth nach Oldenburg zu graben, vom Anfang bis zu Ende, so wird man freylich über die dazu erforderlichen Kosten stutzen; aber wer verkennt die großen dem allgemeinen Wesen, besonders auch der Hauptstadt unsers Landes dadurch zufließenden und jene Summen weit überwiegenden Vortheile jenes Unternehmens? — Gewiß jeder, der diesen Vorschlag in seinem ganzen Umfange überdenkt, wird gestehen, daß